Práctico 9: Transformaciones canónicas y aplicaciones

1. Demuestre directamente, sustituyendo en la ecuación

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1(q,Q,t)}{dt}$$

que $\sum q_i Q_i$ engendra la transformación de intercambio. Demuestre que $F_4 = \sum p_i P_i$ genera también un intercambio de coordenadas y momentos, y que $F_3 = -\sum Q_i p_i$ engendra la transformación idéntica.

2. Se dan las siguientes ecuaciones de transformación entre dos conjuntos de coordenadas

$$Q = \log(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)$$

$$P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p) q^{\frac{1}{2}} \sin p$$

Demostrar que la función que genera esta transformación es

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

3. Uno de los intentos de combinar los dos sistemas de ecuaciones de Hamilton en uno consiste en tomar p y q como partes reales e imaginarias de un número complejo. Demostrar directamente a partir de las ecuaciones de Hamilton que, en el caso de un sistema de un grado de libertad, la transformación

$$Q = q + ip$$

$$P = Q^*$$

no es canónica si se deja inalterada la Hamiltoniana. ¿Podemos encontrar otro sistema de coordenadas Q' y P' que estén relacionadas con Q y P mediante un cambio de escala tan sólo y sean canónicas?

4. Demuestre directamente que la siguiente transformación es canónica.

$$Q = \log \frac{\sin p}{q}$$

$$P = q \cot p$$

5. ¿Para qué valores de a y b representan las ecuaciones $Q = q^\alpha \cos \beta p$, $P = q^\alpha \sin \beta p$ una transformación canónica? ¿Cuál es la forma de la función generatríz en este caso?

6. Demuestre que si la hamiltoniana y una magnitud F son constantes de movimiento $\frac{dF}{dt}$ también lo es.

   Como ilustración de este resultado considere el movimiento uniforme de una partícula libre de masa m. La hamiltoniana se conserva evidentemente y existe una constante del movimiento

$$F = x - \frac{pt}{m}$$

   Demuestre directamente que la constante del movimiento $\frac{dF}{dt}$ coincide con [H,F].

7. La Hamiltoniana de un sistema está definida de la forma

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

Hallar la ecuación de movimiento para q.

Hallar una transformación canónica que reduzca H a la forma de un oscilador armónico. Demostrar que, para las variables transformadas, la solución es tal que se cumple la ecuación hallada anteriormente.

8. Considere el sistema constituído por una partícula sobre la que actúan fuerzas conservativas independientes del acimut de la partícula respecto al eje z de un sistema inercial. Obtenga su hamiltoniana en coordenadas cartesianas respecto de un sistema de ejes que giran uniformemente alrededor del eje z dado con una velocidad angular w. ¿Cuál es el significado físico de la hamiltoniana en este caso? ¿Es una constante del movimiento?

9. Resuelva el problema del movimiento de un proyectil puntual en el espacio bajo la influencia de una fuerza gravitatoria uniforme, usando el método Hamilton-Jacobi. Halle la ecuación de la trayectoria y la dependencia de las coordenadas respecto al tiempo.

10. Plante el problema del trompo simétrico con un punto fijo utilizando el método de Hamilton-Jacobi, y obtenga la solución formal del movimiento.

11. Una partícula se mueve en un plano sometida a un campo de fuerzas que deriva de un potencial

$$V(r, \theta) = -\frac{K}{r^2}\cos\theta.$$

Hallar la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente. Hallar la solución completa de dicha ecuación (se podrá expresar el resultado utilizando integrales).

12. Una partícula de masa m esta obligada a moverse siguiendo una cicloide contenida en el plano vertical y definida por las ecuaciones paramétricas

$$y = l(1 + \cos\phi)$$

$$x = l(\phi + \sin\phi)$$

Existe la fuerza de gravedad usual según y. Usar el método de las variables de ángulo acción para hallar la frecuencia de las oscilaciones para todas las condiciones iniciales tales que $\phi \leq \pi/2$.