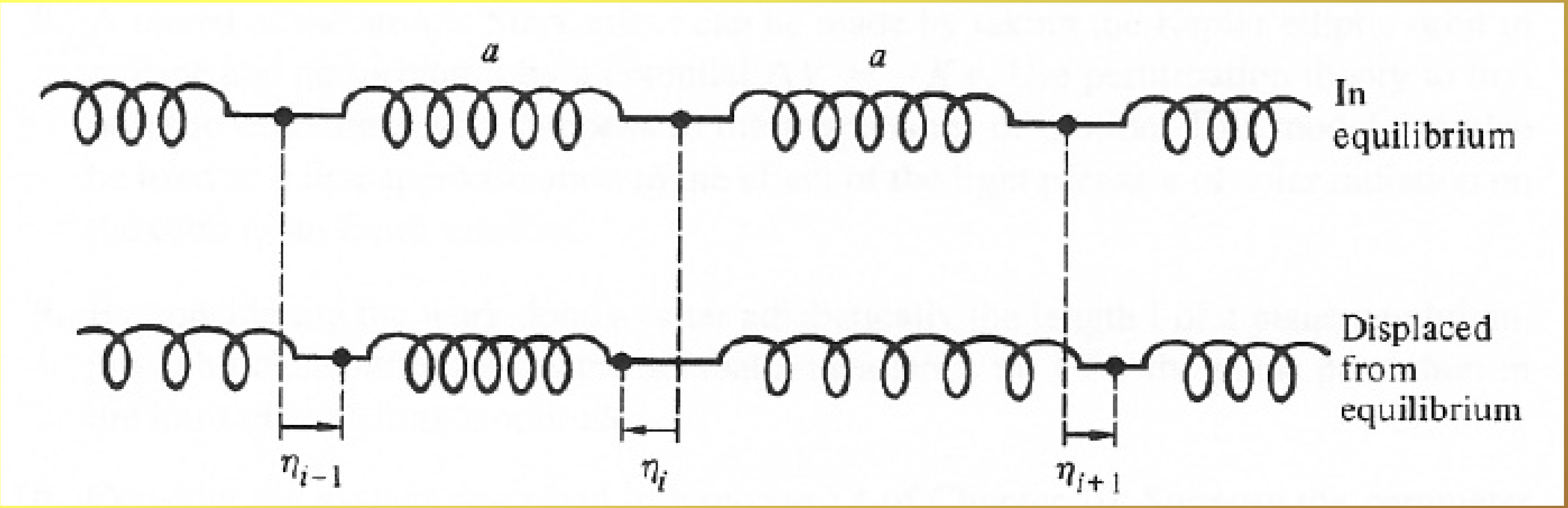
Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana para medios continuos

- Sistemas donde tenemos que **especificar las posiciones** (y otras cantidades) **de todas las partículas** de un sistema
- Consideramos sistemas con **infinitos grados de libertad**
- Muchos ejemplos: acústica (propagación de sonido)
- Elasticidad
- Ondas superficiales en un fluido y muchas otras
- Campos electromagnéticos (partículas y campos)
- Ondas gravitacionales
-

Límite continuo

Oscilaciones longitudinales en una barra (lineales)

- Masas *m* unidas por resortes (longitud natural *a*, constante *k*, masa despreciable) ordenadas en fila
- Movimiento restringido a lo largo de la barra (1d)
- Medimos las coordenadas de cada masa a partir de la posición de equilibrio



Lagrangiano

- La energía cinética es la suma de cada una

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2 ,$$

- La energía potencial de cada resorte

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 .$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i ,$$

Ecuaciones de movimiento

- Una ecuación de movimiento para cada partícula

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a^2}\right) + ka\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a^2}\right) = 0.$$

- Ahora pasamos a poner todo *"por unidad de longitud"*
- Hacer el límite continuo = longitud a tiende a 0 (pero todo tiene que mantenerse acotado!)

Límite continuo

m/a Densidad lineal $\mu,$

Módulo de Young: en una barra elástica la fuerza es proporcional a la extensión por unidad de longitud

$$F = Y\xi,$$

$$\underbrace{F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka}_{Y}\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right),$$

Derivadas

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x + a) - \eta(x)}{a} \rightarrow \frac{d\eta}{dx},$$

La suma se transforma en integral:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right] = \sum_i aL_i,$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2}\int\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Qué pasa con las ecuaciones de movimiento?

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a^2}\right) + ka\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a^2}\right) = 0.$$

- Identificamos la derivada segunda:

$$\lim_{a\to 0} -\frac{Y}{a}\left[\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x-a}\right],$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

- La ecuación de movimiento resulta

$$\mu\frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

Ecuación de ondas

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

$$\eta(x,t),$$

- Las soluciones son ondas viajeras en ambos sentidos con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}.$$

Densidad lagrangiana

$$L = \int\int\int \mathcal{L}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right],$$

Formulación **variacional** para medios continuos

$$L = \int\int\int \mathcal{L}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t\right).$$

- Volvemos al inicio del curso

$$\delta I = \delta \int^{t_2} \ldots$$

$$\delta I = \delta \int_1^2 \int \mathcal{L}\, dx\, dt = 0.$$

Derivadas funcionales

- Repetimos procedimiento, tomando variaciones nulas en los límites temporales y también espaciales

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha\zeta(x, t).$$

- Haciendo desarrollos

$$\frac{dI}{da} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx\, dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right].$$

- Integramos por partes

$$\frac{dI}{da} = \int_{t_1}^{t_2} \int^{x_2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d\eta}{dt}\right) dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}}\right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dt,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d\eta}{dx}\right) dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}}\right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dx.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx\, dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}}\right)\right]\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)_0 = 0,$$

Recordando que las **variaciones** son **arbitrarias** (con **extremos fijos**)

- Obtenemos las nuevas ecuaciones de movimiento para medios continuos $\eta(x, y, z, t).$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$

- Son la versión continua de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

Barra elástica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right],$$

- Aplicamos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}}$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

Generalizaciones

- Se puede generalizar a varias coordenadas
- Eta puede tener varias componentes
- Usamos una notación extendida para las variables espaciales y temporales
- $$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

Compactamos todo

- Letras griegas para índices de 0,1,2,3
- Letras latinas para índice 1,2,3
- Las derivadas con ","
- Por supuesto mantenemos la convención de Einstein

$$\eta_{\rho,\nu} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx^\nu}; \quad \eta_{,j} \equiv \frac{d\eta}{dx^j}; \quad \eta_{i,\mu\nu} = \frac{d^2\eta_i}{dx^\mu dx^\nu}.$$

Repetimos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\nu} x^\nu).$$

$$L = \int \mathcal{L}(dx^i),$$

$$L = \int \mathcal{L}(dx^i),$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_{\rho,\nu}}{\partial \alpha} \right) (dx^\mu).$$

- Integrando por partes

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) \right] \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} (dx^\mu)$$
$$+ \int (dx^\mu) \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right).$$

Finalmente las **ecuaciones de movimiento** nuevamente

$$\frac{d}{dx^{\nu}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho}} = 0.$$

- Recordar sumatoria sobre índices repetidos
- Recordar que la “,” significa derivada

Cómo seguimos?

- Campo electromagnético y otros ejemplos
- Teoremas de conservación
- Relatividad especial
- Formulación Hamiltoniana
-

Suma de una derivada total

- En lugar de una función ahora es posible una 4- divergencia sin que cambien las ecs de movimiento

$$\frac{dF_\nu(\eta_\rho, x^\mu)}{dx^\nu}$$

- Teorema de la divergencia

$$\delta \int (dx^\mu) \frac{dF_\nu(\eta_\rho, x^\mu)}{dx^\nu} = \delta \int F_\nu(\eta_\rho, x^\mu)\, d\sigma^\nu = 0,$$

Teoremas de conservación

- Vimos varias **cantidades conservadas**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

$$h(q_1, \ldots, q_n; \quad \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; \quad t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L,$$

- Vamos a hacer un procedimiento parecido

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho}\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}.$$

Tensor de energía momento

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho}\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}.$$

- Usamos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = 0.$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right)\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\frac{d\eta_{\rho,\mu}}{dx^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}$$

$$= \frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}.$$

Tensor de energía esfuerzo

- Agrupando las derivadas

$$\frac{d}{dx^{\nu}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L}\,\delta_{\mu\nu}\right] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}.$$

- Supongamos que la densidad lagrangiana no depende explícitamente de las coordenadas (el último término es nulo)
- Se puede escribir como una divergencia

$$\frac{dT_{\mu}{}^{\nu}}{dx^{\nu}} = T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0$$

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu}{}^{\nu}.$$

Cómo interpretamos?

$$\frac{dT_\mu{}^\nu}{dx^\nu} = T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0$$

$$T_\mu{}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L}\delta_\mu{}^\nu .$$

- Calculamos T_{00} que resulta la densidad de energía total

$$T_0{}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}.$$

- Si usamos el $T_\mu{}^\nu$ obtenemos que lo vemos como una ecuación de continuidad

$$\frac{dT_\mu{}^0}{dt} + \frac{dT_\mu{}^j}{dx} = 0,$$

$$T^\nu_{\mu,\nu} = \frac{dT^0_\mu}{cdt} + \frac{dT^i_\mu}{dx^i} = \frac{dT^0_\mu}{cdt} + \nabla \cdot T_\mu = 0$$

Formulación Hamiltoniana

- Buscaremos como definir un momento canónico y una densidad hamiltoniana
- Lo más directo sería

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}.$$

$$H \equiv p_i\dot{\eta}_i - L = a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L,$$

$$H = a\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L_i\right).$$

- Tiende a cero, entonces definimos una *densidad* de momento

$$\operatorname*{Lim}_{a\to 0}\frac{p_i}{a} \equiv \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}.$$

En la definición de H el tiempo recibía tratamiento *especial*

$$H = \int dx\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}\dot{\eta} - \mathcal{L}\right).$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\eta} - \mathcal{L}.$$

Formulación Hamiltoniana

- Si el campo tiene varios componentes η_ρ

$$\pi^\rho(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho}.$$

- Las variables defines un espacio de fases pero de dimensión infinita $\eta_\rho(x^i, t), \pi^\rho(x^i, t)$
- Si una variable es cíclica, tenemos también relaciones de conservación
-

$$\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}} = 0,$$

$$\frac{d\pi^\rho}{dt} + \frac{d}{dx^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = 0.$$

$$\Pi^\rho = \int dV\, \pi^\rho(x^i, t).$$

La densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\eta^{\rho}, \eta_{\rho,i}, \pi_{\rho}, x^{i}) = \pi^{\rho}\dot{\eta}_{\rho} - \mathcal{L},$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\rho}} = \dot{\eta}_{\rho} + \pi^{\lambda}\frac{\partial \dot{\eta}_{\lambda}}{\partial \pi^{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{\lambda}}\frac{\partial \dot{\eta}_{\lambda}}{\partial \pi^{\rho}} = \dot{\eta}_{\rho},$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} = \pi^{\lambda}\frac{\partial \dot{\eta}_{\lambda}}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{\lambda}}\frac{\partial \dot{\eta}_{\lambda}}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho}} - \frac{d}{dx^{i}}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}}\right) = -\dot{\pi}^{\rho}.$$

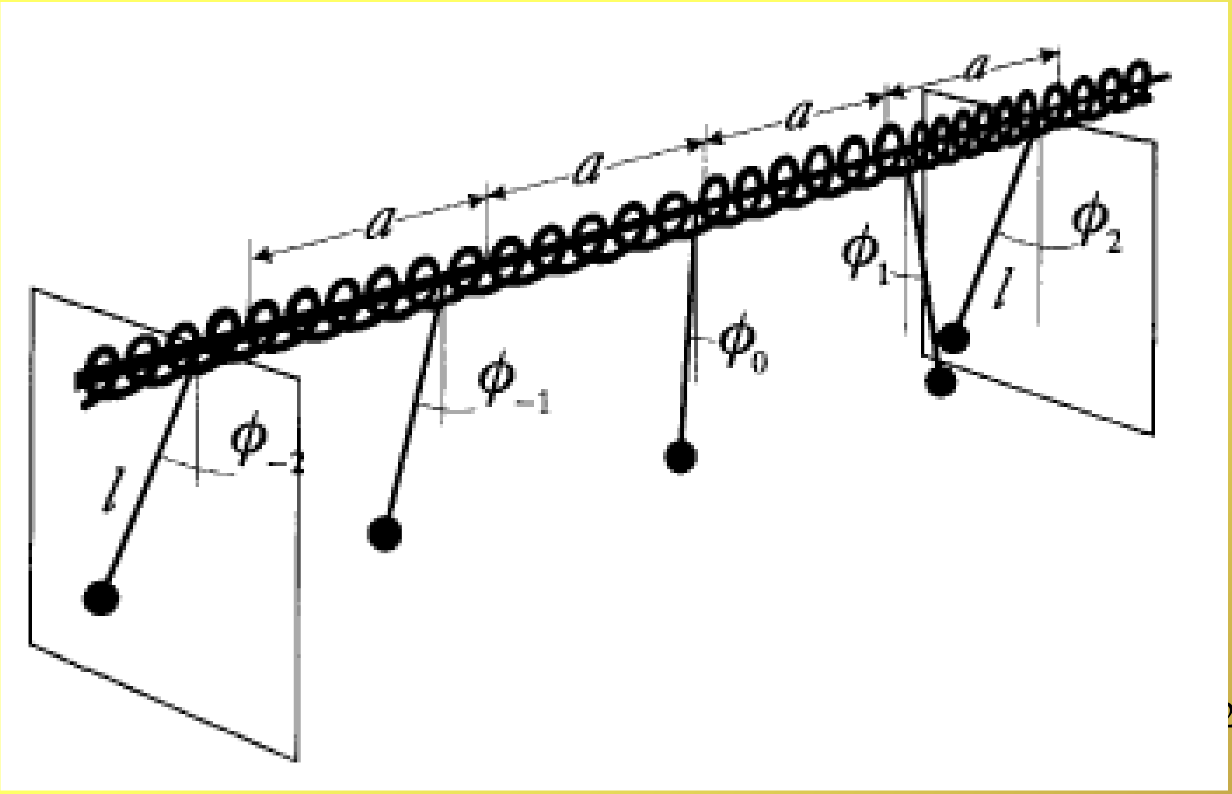
- Tienen diferente forma que las *clásicas*

$$\frac{\delta}{\delta \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{d}{dx^{i}}\frac{\partial}{\partial \psi,_{i}}.$$

$$\dot{\eta}_{\rho} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^{\rho}}, \qquad \dot{\pi}^{\rho} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_{\rho}}.$$

Ecuación de sine-Gordon

- EDP no lineal
- Conjunto de péndulos: longitud l, masa m, acoplados con tuercas y resortes, paso de rosca β
- Las masas se mueven oscilando y a la vez adelante y atrás.
- Sobre la guía hay resortes de constante k y longitud natural a



Cuando un péndulo oscila un ángulo ϕ, se enrosca un distancia $x= \phi \beta$ (y el resorte se aprieta o se estira)

Lagrangiano

$$x = \beta\phi$$

- Coordenadas generalizadas: ϕ_j
- La energía cinética es:

$$T_j = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\phi}_j^2 + \dot{x}_j^2\right) = \frac{1}{2}m(l^2 + \beta^2)\dot{\phi}_j^2 \equiv \frac{1}{2}m\lambda^2\dot{\phi}_j^2.$$

- La energía potencial es la gravitatoria y la de los resortes (-n,n)

$$L = \frac{1}{2}m\lambda^2\sum_{j=-n}^{n}\dot{\phi}_j^2 - \left\{mgl\sum_{j=-n}^{n}(1-\cos\phi_j) + \frac{1}{2}k\beta^2\sum_{j=-n}^{n-1}(\phi_{j+1}-\phi_j)^2\right\},$$

Ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\phi}_j - \omega^2[(\phi_{j+1} - \phi_j) - (\phi_j - \phi_{j-1})] + \Omega^2 \sin\phi_j = 0, \quad -(n-1) \leq j \leq n-1,$$

- Con los parámetros: $\omega^2 = k\beta^2/m\lambda^2$ and $\Omega^2 = gl/\lambda^2$.
- Límite continuo

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \Omega^2 \sin\phi(x) = 0,$$

Límite continuo del Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2s}\lambda^2 \sum \dot{\phi}(x)^2 - \left\{ \frac{m}{s} g l \sum [1 - \cos\phi(x)] + \frac{1}{2} s k \beta^2 \sum [\phi(x + \Delta x) - \phi(x)]^2 \right\}$$

$$= \sum \Delta x \left\{ \sum \frac{1}{2}\rho\lambda^2 \dot{\phi}^2(x) - \rho\Omega^2\lambda^2 [1 - \cos\phi(x)] - \frac{1}{2} Y \lambda^2 \left(\frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} \right)^2 \right\}.$$

$$Y\lambda^2 \equiv ak\beta^2 = (a/s)(sk\beta^2),$$

$$L = \int \rho\lambda^2 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}v^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \Omega^2(1 - \cos\phi) \right\} dx.$$

Relatividad especial

- Transformaciones de Lorentz

$$\mathbf{x}' = \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{V}t) + (1-\gamma)\left\{\mathbf{x} - \frac{\mathbf{V}}{V}\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{V}}{V}\right]\right\}, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

- Vectores y tensores deben transformar de acuerdo a $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, $R'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}R^{\mu\nu}$.

  Se define un espacio de Minkowski

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1 = g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{00}.$$

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu}a^{\nu}, \quad R_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\lambda}R^{\lambda\nu}, \quad R^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\lambda}R^{\mu\lambda}.$$

Ecuaciones de Maxwell

- Se define un tensor antisimétrico $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$

$$\mathbf{E} \equiv (E_1, E_2, E_3) = (f_{10}, f_{20}, f_{30}),$$
$$\mathbf{B} \equiv (B_1, B_2, B_3) = (f_{23}, f_{31}, f_{12}),$$

$$[f_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuaciones inhomogéneas de Maxwell

- Ley de Gauss y de Ampere-Maxwell

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ and $\nabla \wedge \mathbf{B} - \partial \mathbf{E}/\partial t = \mathbf{j})$

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = j^\mu ,$$

- $$\partial_0 f^{10} + \partial_1 f^{11} + \partial_2 f^{12} + \partial_3 f^{13} = -\frac{\partial E_1}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_3}{\partial x^2} + \frac{\partial(-B_2)}{\partial x^3}$$
  $$= (\nabla \wedge \mathbf{B})_1 - \frac{\partial E_1}{\partial t} = j_1 .$$

Ecuación de continuidad

- Usando

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = j^\mu,$$

-
- Y la antisimetría

$$\partial_\mu \partial_\nu f^{\mu\nu} = \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Las ecuaciones homogéneas

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ and } \nabla \wedge \mathbf{E} + \partial \mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0})$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0$$

$$\begin{aligned} \partial_0 f_{12} + \partial_1 f_{20} + \partial_2 f_{01} &= \frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} + \frac{\partial(-E_1)}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial B_3}{\partial t} + (\nabla \wedge \mathbf{E})_3 = 0. \end{aligned}$$

Potencial

- Pulse para añadir texto

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = f_{\mu\nu}.$$

$$\bar{A}^\mu = A^\mu + g^{\mu\nu}\partial_\nu \chi ,$$