Práctico 10: Medios Continuos

1. (a) Las vibraciones transversales de una cuerda tensa se pueden aproximar mediante un sistema discreto consistente en puntos materiales igualmente espaciados, situados sobre una cuerda sin peso. Demostrar que si se hace tender a cero la separación entre dichos puntos, la lagrangiana total tiende al límite

$$L = \frac{1}{2}\int \left(\mu\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right) dx$$

para la cuerda continua, siendo T la tensión. ¿Cuál sería la ecuación de movimiento si la densidad μ fuese función de la posición?

(b) Obtener la lagrangiana para la cuerda continua hallando las energías cinética y potencial correspondientes al movimiento transversal. La energía potencial puede obtenerse a partir del trabajo que efectúa la fuerza de tensión al estirar la cuerda durante la vibración transversal

2. Considere las variables ψ y ψ^* como variables independientes en la densidad Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^* + V\psi\psi^* + \frac{h}{4\pi i}(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*).$$

Muestre que la densidad lagrangeana conduce a la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi + V\psi = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

y a su compleja conjugada.

3. Un campo escalar relativista y con masa está descrito por la ecuación de Klein-Gordon

$$\Box\phi - m^2\phi = 0 \tag{1}$$

donde $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ con $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ la métrica de Minkowski (en este problema trabajaremos en unidades tales que $c = 1$). Muestre que la ecuación (1) puede obtenerse a partir de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right).$$

4. Supongamos que la densidad Lagrangiana en el principio de Hamilton es una función de derivadas de mayor orden de las variables η_ρ

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\mu}, \eta_{\rho,\mu\nu}, x_\lambda).$$

Asumiendo que las variaciones se anulan en los extremos, obtenga las ecuaciones de movimiento correspondientes.

5. Muestre que la ecuación Korteweg–de Vries (KdV)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

se puede obtener partiendo de un campo escalar ψ con densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\psi_x\psi_t + \frac{\alpha}{6}\psi_x^3 - \frac{\nu}{2}\psi_{xx}^2,$$

donde los subíndices indican derivadas respecto a la variable correspondiente con la condición que la variable ψ sea un potencial de ϕ

$$\phi = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$