Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2024

Práctico 8: Ecuaciones diferenciales

1. Una población hipotética se modela mediante la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = \frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

a) ¿Para qué valores de P la solución es creciente?

b) ¿Para qué valores de P la solución es decreciente?

c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio[1]?

d) Encuentre la solución que satisface la condición inicial $P(0) = 60$.

2. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$,

b) $xy^2y' = x + 1$,

c) $y' = xe^{-y}$,

d) $(y^2x + y^2)y' = 1$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, con las correspondientes condiciones iniciales.

a) $dy/dx = x/y, y(0) = -3$.

b) $dy/dx = \ln x/xy, y(1) = 2$.

c) $y' = (xy \operatorname{sen} x)(1 + y),\ y(0) = 1$

d) $x \ln x = y(1 + \sqrt{3 + y^2})y',\ y(1) = 1$.

4. La función $f(x)$ es solución de la ecuación diferencial $y' = y^4 - 6y^3 + 5y^2$.

a) Determine f en los casos en que sea una solución de equilibrio.

b) Si $1 < f(0) < 5$, demuestre que la función f es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

c) ¿Qué se puede decir sobre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ cuando f es como en el inciso b)?

d) Siguiendo la línea de los incisos b) y c), haga un análisis de $f(x)$ si $f(0) > 5$.

5. Resuelva los siguientes problemas:

a) Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ y cuya pendiente en (x, y) es xy.

[1] Una solución se dice que es de equilibrio cuando es una función constante.

b) Halle la función f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = 1/2$.

c) Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de elípses de ecuaciones $x^2 + 2y^2 = k^2$, donde $k \neq 0$ (haga un dibujo de las elípses en los casos $k = 1, 2, 3$).

d) Ídem que en el inciso *c*) en el caso de las hipérbolas de ecuaciones $xy = k$, $k \neq 0$.

6. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, y(\pi/2) = 0$.

b) $y + y' = 2, y(0) = 0$,

c) $xy' + 2y = 3x, y(1) = 5$

d) $y' = 2xy + 3x^2 e^{x^2}, y(0) = 5$

e) $y' + y \cot x = \cos x, y(\pi) = 1$.

f) $2xy' + y = 10\sqrt{x}, y(4) = 10$.

7. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones lineales (homogéneas) de segundo orden

a) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

c) $4y'' + 4y' + y = 0$.

8. Resuelva los problemas de valores iniciales siguientes:

a) $x'' + 4x' + 29x = 0, x(0) = 5, x'(0) = 5$.

b) $x'' + 4x' + 4x = 0, x(0) = 4, x'(0) = 4$.

c) $x'' + 6x' + 8x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 2$.

9. Considerar los siguientes ejercicios involucrando ecuaciones diferenciales lineales (no homogéneas) de segundo orden:

a) Hallar la solución de $x'' + x = f(t)$ que satisface $x(0) = 1, x'(0) = 1$, en los tres casos siguientes: $f(t) = 1 + t$, $f(t) = \cos 2t$ y $f(t) = \operatorname{sen} t$.

b) Resolver el problema de valores iniciales: $y'' - y' - 12y = e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

c) Resolver el problema de valores iniciales: $x'' + 2x' + x = e^{-t}, x(0) = 1, x'(0) = 1$.

d) Hallar la solución general de $x'' - 2x' + x = f(t)$ en los dos casos siguientes: $f(t) = t^2 + 5e^{3t}$ y $f(t) = 2000t^2 - 150e^t$.