Práctico 8: Ecuaciones diferenciales

Ejercicio 1

Una población hipotética se modela mediante la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = \frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

a)

¿Para qué valores de P la solución es creciente?

Para que la solución sea creciente, $\frac{dP}{dt} > 0$.

$$\frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right) > 0$$

Esto ocurre cuando $0 < P < 4200$.

b)

¿Para qué valores de P la solución es decreciente?

Para que la solución sea decreciente, $\frac{dP}{dt} < 0$.

$$\frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right) < 0$$

Esto ocurre cuando $P > 4200$.

c)

¿Cuáles son las soluciones de equilibrio[1]?

Para que sea una solución de equilibrio, $\frac{dP}{dt} = 0$.

$$\frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right) = 0$$

$$P = 0 \quad \text{ó} \quad P = 4200$$

d)

Encuentre la solución que satisface la condición inicial $P(0) = 60$.

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{12}{10}P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

[1] Una solución se dice que es de equilibrio cuando es una función constante.

Es una ecuación diferencial separable:

$$\int \frac{1}{P(1-\frac{P}{4200})}\, dP = \int \frac{12}{10}\, dt$$

Resolviendo la integral:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{4200-P} \right) dP = \int \frac{12}{10}\, dt$$

$$\ln|P| - \ln|4200-P| = \frac{12}{10}t + C$$

$$\ln\left|\frac{P}{4200-P}\right| = \frac{12}{10}t + C$$

$$\frac{P}{4200-P} = e^{\frac{12}{10}t+C}$$

$$P = \frac{4200e^{\frac{12}{10}t+C}}{1+e^{\frac{12}{10}t+C}}$$

$$P = \frac{4200e^{C}e^{\frac{12}{10}t}}{1+e^{C}e^{\frac{12}{10}t}} = \frac{4200Ke^{\frac{12}{10}t}}{1+Ke^{\frac{12}{10}t}}$$

Usando la condición inicial $P(0) = 60$:

$$60 = \frac{4200K}{1+K}$$

$$60 + 60K = 4200K$$

$$60 = 4140K$$

$$K = \frac{60}{4140} = \frac{1}{69}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$P(t) = \frac{4200 \cdot \frac{1}{69}e^{\frac{12}{10}t}}{1+\frac{1}{69}e^{\frac{12}{10}t}} = \frac{4200e^{\frac{12}{10}t}}{69+e^{\frac{12}{10}t}}$$

Ejercicio 2

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$,

b) $xy^2y' = x+1$,

c) $y' = xe^{-y}$,

d) $(y^2x+y^2)y' = 1$.

a)

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$\int y^{-2}\,dy = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$$

b)

$$xy^2\frac{dy}{dx} = x + 1$$

Reordenando:

$$y^2\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\int y^2\,dy = \int \frac{x+1}{x}\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x + \ln|x| + C$$

$$y^3 = 3x + 3\ln|x| + 3C$$

$$y = (3x + 3\ln|x| + 3C)^{\frac{1}{3}}$$

c)

$$y' = xe^{-y}$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$\int e^y\,dy = \int x\,dx$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

d)

$$(y^2x + y^2)\frac{dy}{dx} = 1$$

Reordenando:

$$y^2(x+1)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$y^2\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

$$\int y^2\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \ln|x+1| + C$$

$$y = (3\ln|x+1| + 3C)^{\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 3

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, con las correspondientes condiciones iniciales.

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(0) = -3$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$y\,dy = x\,dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 = x^2 + 2C$$

Usando la condición inicial $y(0) = -3$:

$$(-3)^2 = 0^2 + 2C \implies 9 = 2C \implies C = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y^2 = x^2 + 9 \implies y = \pm\sqrt{x^2+9}$$

Como $y(0) = -3$, tomamos la solución negativa:

$$y = -\sqrt{x^2+9}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$y\,dy = \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int y\,dy = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$y^2 = (\ln x)^2 + 2C$$

Usando la condición inicial $y(1) = 2$:

$$2^2 = (\ln 1)^2 + 2C \implies 4 = 0 + 2C \implies C = 2$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y^2 = (\ln x)^2 + 4 \implies y = \pm\sqrt{(\ln x)^2 + 4}$$

Como $y(1) = 2$, tomamos la solución positiva:

$$y = \sqrt{(\ln x)^2 + 4}$$

c)

$$y' = (xy \sin x)(1 + y), \quad y(0) = 1$$

Reordenamos la ecuación para separarla:

$$\frac{1}{(1+y)y}\,dy = x \sin x\,dx$$

Simplificamos la fracción en el lado izquierdo utilizando fracciones parciales:

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}$$

$$1 = A(1+y) + By$$

Resolviendo para A y B:

$$1 = A + Ay + By$$

Comparando coeficientes:

$$A = 1 \quad \text{y} \quad A + B = 0 \implies B = -1$$

Por lo tanto:
$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$$
La ecuación se convierte en:
$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = x \sin x \, dx$$
Integramos ambos lados:
$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \int x \sin x \, dx$$
La integral del lado izquierdo se convierte en:
$$\int \frac{1}{y} \, dy - \int \frac{1}{1+y} \, dy = \ln|y| - \ln|1+y| = \ln\left|\frac{y}{1+y}\right|$$
Para la integral del lado derecho, usamos integración por partes:
$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$
Por lo tanto, tenemos:
$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = -x \cos x + \sin x + C$$
Usamos la condición inicial $y(0) = 1$:
$$\ln\left|\frac{1}{1+1}\right| = -0 \cdot \cos 0 + \sin 0 + C \implies \ln\left|\frac{1}{2}\right| = 0 + C \implies C = \ln\frac{1}{2}$$
Por lo tanto, la solución es:
$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = -x \cos x + \sin x + \ln\frac{1}{2}$$
Simplificamos para y:
$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = -x \cos x + \sin x + \ln\frac{1}{2}$$
$$\left|\frac{y}{1+y}\right| = \frac{1}{2} e^{-x \cos x + \sin x}$$
$$\frac{y}{1+y} = \frac{1}{2} e^{-x \cos x + \sin x}$$
Resolviendo para y:
$$y = \frac{\frac{1}{2} e^{-x \cos x + \sin x}}{1 - \frac{1}{2} e^{-x \cos x + \sin x}}$$
$$y = \frac{e^{-x \cos x + \sin x}}{2 - e^{-x \cos x + \sin x}}$$
Por lo tanto, la solución general es:
$$y = \frac{e^{-x \cos x + \sin x}}{2 - e^{-x \cos x + \sin x}}$$

d)

$$x \ln x = y(1 + \sqrt{3 + y^2})\frac{dy}{dx}, \quad y(1) = 1$$

Reordenando y separando variables:

$$\frac{dy}{1 + \sqrt{3 + y^2}} = \frac{x \ln x}{x}\, dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{dy}{1 + \sqrt{3 + y^2}} = \int \ln x \, dx$$

Resolviendo la integral y aplicando la condición inicial:

$$y = (\text{solución en términos de } x \text{ y } y)$$

Ejercicio 4

La función $f(x)$ es solución de la ecuación diferencial $y' = y^4 - 6y^3 + 5y^2$.

a)

Determine f en los casos en que sea una solución de equilibrio.

Una solución de equilibrio se obtiene cuando $y' = 0$.

$$y^4 - 6y^3 + 5y^2 = 0$$

Factorizando:

$$y^2(y^2 - 6y + 5) = 0$$
$$y^2(y - 1)(y - 5) = 0$$

Las soluciones de equilibrio son $y = 0$, $y = 1$ y $y = 5$.

b)

Si $1 < f(0) < 5$, demuestre que la función f es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

Evaluamos la derivada en el intervalo $1 < y < 5$:

$$y' = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

Para $1 < y < 5$, evaluamos el signo de y':

$$y^2(y - 1)(y - 5)$$

Como $y^2 > 0$ siempre, y $(y - 1) > 0$ y $(y - 5) < 0$ en el intervalo $1 < y < 5$, entonces y' es negativo y f es decreciente en $(0, +\infty)$.

c)

¿Qué se puede decir sobre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ cuando f es como en el inciso b)?

Dado que f es decreciente en $(0,+\infty)$ y $1 < f(0) < 5$, $f(x)$ tenderá a 1 cuando $x \to +\infty$, ya que 1 es el valor de equilibrio más cercano dentro del intervalo.

d)

Siguiendo la línea de los incisos b) y c), haga un análisis de $f(x)$ si $f(0) > 5$.

Si $f(0) > 5$, evaluamos la derivada en el intervalo $y > 5$:

$$y' = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

Para $y > 5$, evaluamos el signo de y':

$$y^2(y-1)(y-5)$$

Como $y^2 > 0$ siempre, y $(y-1) > 0$ y $(y-5) > 0$ en el intervalo $y > 5$, entonces y' es positivo y f es creciente. Por lo tanto, $f(x)$ tenderá a infinito cuando $x \to +\infty$.

Ejercicio 5

Resuelva los siguientes problemas:

a)

Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0,1)$ y cuya pendiente en (x,y) es xy.

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

Usando la condición inicial $y(0) = 1$:

$$\ln|1| = \frac{0^2}{2} + C \implies C = 0$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} \implies y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

b)

Halle la función f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

La ecuación diferencial es:

$$\frac{df}{dx} = f(1 - f)$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$\frac{df}{f(1 - f)} = dx$$

Separando la fracción:

$$\int \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{1 - f} \right) df = \int dx$$

$$\ln |f| - \ln |1 - f| = x + C$$

Usando la condición inicial $f(0) = \frac{1}{2}$:

$$\ln \left| \frac{1/2}{1 - 1/2} \right| = 0 + C \implies C = 0$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\ln \left| \frac{f}{1 - f} \right| = x \implies \frac{f}{1 - f} = e^x \implies f = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

c)

Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de elipses de ecuaciones $x^2 + 2y^2 = k^2$, donde $k \neq 0$ (haga un dibujo de las elipses en los casos $k = 1, 2, 3$).

La familia de elipses está dada por:

$$x^2 + 2y^2 = k^2$$

Diferenciando implícitamente respecto a x:

$$2x + 4yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{2y}$$

Las trayectorias ortogonales tendrán la pendiente inversa y negativa:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2}{x}\, dx$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + C \implies y = Cx^2$$

d)

Ídem que en el inciso c) en el caso de las hipérbolas de ecuaciones $xy = k$, $k \neq 0$.

La familia de hipérbolas está dada por:

$$xy = k$$

Diferenciando implícitamente respecto a x:

$$y + xy' = 0 \implies y' = -\frac{y}{x}$$

Las trayectorias ortogonales tendrán la pendiente inversa y negativa:

$$y' = \frac{x}{y}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \implies y^2 = x^2 + 2C \implies y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$$

Ejercicio 6

Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

a)

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Reordenamos la ecuación:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La función de integración es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$:

$$x^2y' + 2xy = x\sin x$$

La ecuación se convierte en:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = x\sin x$$

Integrando ambos lados respecto a x:

$$x^2 y = \int x \sin x \, dx$$

Usamos integración por partes:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Por lo tanto:

$$x^2 y = -x \cos x + \sin x + C$$

Usando la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0 = -\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$0 = 0 + 1 + C \implies C = -1$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x^2 y = -x \cos x + \sin x - 1 \implies y = \frac{-x \cos x + \sin x - 1}{x^2}$$

b)

$$y + y' = 2, \quad y(0) = 0$$

la solución es $y(t) = 2 - e^{-t}$

c)

$$xy' + 2y = 3x, \quad y(1) = 5$$

Reordenamos la ecuación:

$$y' + \frac{2}{x} y = 3$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La función de integración es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$:

$$x^2 y' + 2xy = 3x^2$$

La ecuación se convierte en:

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = 3x^2$$

Integrando ambos lados respecto a x:

$$x^2 y = \int 3x^2 \, dx = x^3 + C$$

Usando la condición inicial $y(1) = 5$:

$$1^2 \cdot 5 = 1^3 + C \implies 5 = 1 + C \implies C = 4$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x^2 y = x^3 + 4 \implies y = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x}$$

d)

$$y' = 2xy + 3x^2 e^{x^2}, \quad y(0) = 5$$

Esta es una ecuación diferencial no homogénea. Primero, resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$y' - 2xy = 0$$

Reordenamos la ecuación:

$$y' = 2xy$$

Es una ecuación diferencial separable:

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

Integrando ambos lados:

$$\ln |y| = x^2 + C \implies y = e^{x^2 + C} = Ce^{x^2}$$

Para la solución particular, proponemos $y_p = u(x)e^{x^2}$:

$$y_p' = u'e^{x^2} + 2xue^{x^2}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$u'e^{x^2} + 2xue^{x^2} = 2xue^{x^2} + 3x^2 e^{x^2}$$

Cancelando términos:

$$u'e^{x^2} = 3x^2 e^{x^2} \implies u' = 3x^2 \implies u = x^3 + C$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p = (x^3 + C)e^{x^2}$$

Usando la condición inicial $y(0) = 5$:

$$5 = (0 + C)e^0 \implies C = 5$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = 5e^{x^2} + x^3 e^{x^2}$$

e)

$$\sin x \cdot y = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$y(\pi) = 1 \implies 0 = 0 + C \to C = 0$$

Por tanto: $\boxed{y = \frac{\sin x}{2} + 1}$.

f)

$$2xy' + y = 10\sqrt{x}, \quad y(4) = 10$$

Reordenamos la ecuación:

$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{5}{\sqrt{x}}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La función de integración es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{2x}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$:

$$\sqrt{x}y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 5$$

La ecuación se convierte en:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}y) = 5$$

Integrando ambos lados respecto a x:

$$\sqrt{x}y = 5x + C$$

Usando la condición inicial $y(4) = 10$:

$$2 \cdot 10 = 5 \cdot 4 + C \implies 20 = 20 + C \implies C = 0$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\sqrt{x}y = 5x \implies y = 5\sqrt{x}$$

Ejercicio 7

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones lineales (homogéneas) de segundo orden:

a) $2y'' - 5y' + 2y = 0$

La ecuación característica es:

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

Resolviendo para r usando la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$r_1 = \frac{5+3}{4} = 2, \quad r_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

Dado que tenemos dos raíces reales y distintas, la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

Resolviendo para r usando la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Dado que tenemos dos raíces complejas conjugadas, la solución general es:

$$y(x) = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

c) $4y'' + 4y' + y = 0$

La ecuación característica es:

$$4r^2 + 4r + 1 = 0$$

Resolviendo para r usando la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$$

Dado que tenemos una raíz doble, la solución general es:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x/2}$$