Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo III
Curso 2024

Práctico 8

Teoremas de Green, de Stokes y de Gauss.

1. Usando el teorema de Green calcular el área dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Calcular las siguientes integrales de línea, directamente y también usando el teorema de Green:

   a) $\int_C (1 - x^2) y \, dx + (1 + y^2) x \, dy$, donde C está dada por $x^2 + y^2 = a^2$.

   b) $\int_C xy^2 dy - x^2 y \, dx$, donde C es el borde del anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

3. Usar el teorema de Stokes para calcular $\int_C (x - z) dx + (x + y) dy + (y + z) \, dz$, donde C es la elipse en la que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ corta al plano $z = -y$, orientada en sentido antihorario.

4. Consideramos $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ y $F : U \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, f(z) \right)$, donde f es suave.

   a) Probar que $\operatorname{rot} F = 0$.

   b) Probar, por cálculo directo, que $\int_C F \cdot ds = \pm 2\pi$ para toda circunferencia horizontal C centrada en un punto del eje z, y explicar por qué esto no contradice el teorema de Stokes.

5. Calcular el flujo del rotor del campo vectorial $X(x, y, z) = (z - x, x - z, y - x)$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ con normal formando ángulo agudo con el eje Oz.

6. Sea S una superficie orientable compacta con borde, y sea C el borde de S con la orientación inducida. Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fijo. Definimos los campos $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$F(x, y, z) = (a, b, c) \times (x, y, z) \text{ y } G(x, y, z) = (a, b, c)$$

   para todo (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$. Probar que $\int_C F = 2 \int_S G$.

7. Calcular la circulación de $X(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ a lo largo de la curva C siendo C la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, orientado en el sentido contrario de las agujas del reloj (visto “desde arriba“).

8. Sea $X(x, y, z) = (x^2, 2xy + x, z)$. Sean C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, ambos contenidos en el plano $z = 0$.

   a) Determinar el flujo de X hacia el exterior de S (normal hacia arriba).

   b) Determinar la circulación de X a lo largo de C.

   c) Hallar el flujo de $\operatorname{rot} X$. Verificar directamente el teorema de Stokes en este caso.

9. En los siguientes casos usar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F \cdot dA$:

   a) $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, donde S es el borde del cubo $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$.

   b) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, donde S es la esfera unidad.

c) $F(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$, donde S es el borde del tetraedro determinado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

10. Mostrar, usando Gauss, que el volumen de una región cuyo borde S es una superficie compacta es igual a un tercio del flujo de $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S orientada con la normal saliente.

11. En los siguientes casos probar que el campo dado X es solenoidal (i.e.: div $X = 0$), y hallar un potencial vectorial para X, es decir, un campo Y con rotacional X (sugerencia: buscar potenciales planos, i.e, de la forma $Y = (P, Q, 0)$).

    a) $X(x, y, z) = (xz, -yz, y)$.

    b) $X(x, y, z) = (xe^y, -x\cos z, -ze^y)$.