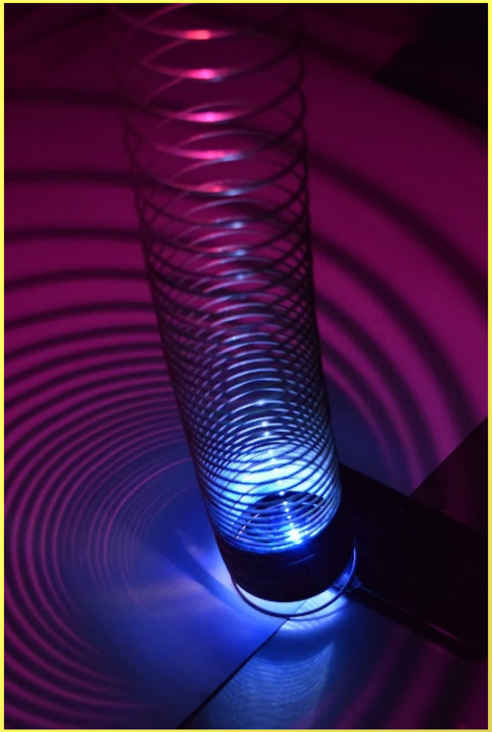
Mecánica Analítica 2024



Arturo Martí

Instituto de Física, Facultad de Ciencias

UdelaR

Pequeñas oscilaciones.

- Describen movimiento alrededor de puntos fijos
- También alrededor de movimientos periódicos
- Aplicaciones en espectroscopía, acústica, circuitos acoplados
- Aparecen conceptos importantes como modos y frecuencias normales
- Se basa en considerar *pequeñas desviaciones* respecto a movimientos conocidos y quedarnos con los términos a orden más bajo

Caso uni-dimensional

- El Lagrangiano es en muchos casos

$$L = \frac{1}{2}\alpha(q)\,\dot{q}^2 - V(q)\,,$$ con $\alpha(q)$ positiva

- Las condiciones de equilibrio están dadas por

$$\left(\frac{dV}{dq}\right)_{q=q^{(0)}} = 0$$

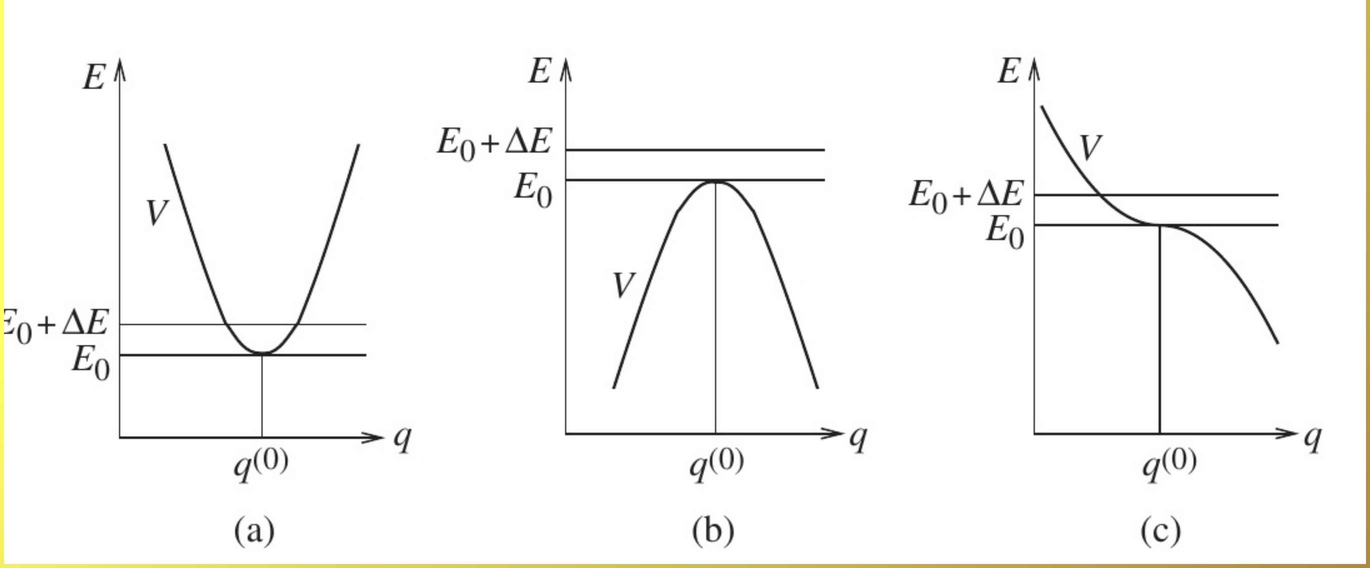
- La ecuación de movimiento es $$\alpha(q)\ddot{q} + \frac{\alpha'(q)}{2}\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = 0\,,$$

- La solución en el equilibrio es $$q = q^{(0)} = \text{constant}$$

Estabilidad de la solución

- Una solución de equilibrio es **estable** si una perturbación suficientemente pequeña da lugar a movimientos que **permanecen cerca** de la solución de equilibrio
- En el punto de equilibrio el potencial es estacionario (máximo, mínimo, inflexión)
- El criterio de estabilidad es

$$\left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q=q^{(0)}} > 0\,,$$



Oscilaciones alrededor del equilibrio

- Definimos $q = q^{(0)} + \eta,$ donde eta es pequeño
- El potencial se puede desarrollar

$$V(q) = V(q^{(0)} + \eta) = V(q^{(0)}) + \left(\frac{dV}{dq}\right)_{q=q^{(0)}} \eta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q=q^{(0)}} \eta^2 + \cdots .$$

- Nos quedamos con el primer término no nulo
- $$V(q) = V_0 + \frac{1}{2}k^{(0)}\eta^2 ,$$
  $$k^{(0)} = \left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q=q^{(0)}} > 0$$

La **energía cinética**

- También se desarrolla

$$\alpha(q) = \alpha(q^{(0)} + \eta) = \alpha(q^{(0)}) + \left(\frac{d\alpha}{dq}\right)_{q=q^{(0)}} \eta + \cdots .$$

- Nos quedamos también con los términos de orden más bajo no nulo

$$L = \frac{\alpha^{(0)}}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{k^{(0)}}{2}\eta^2 ,$$

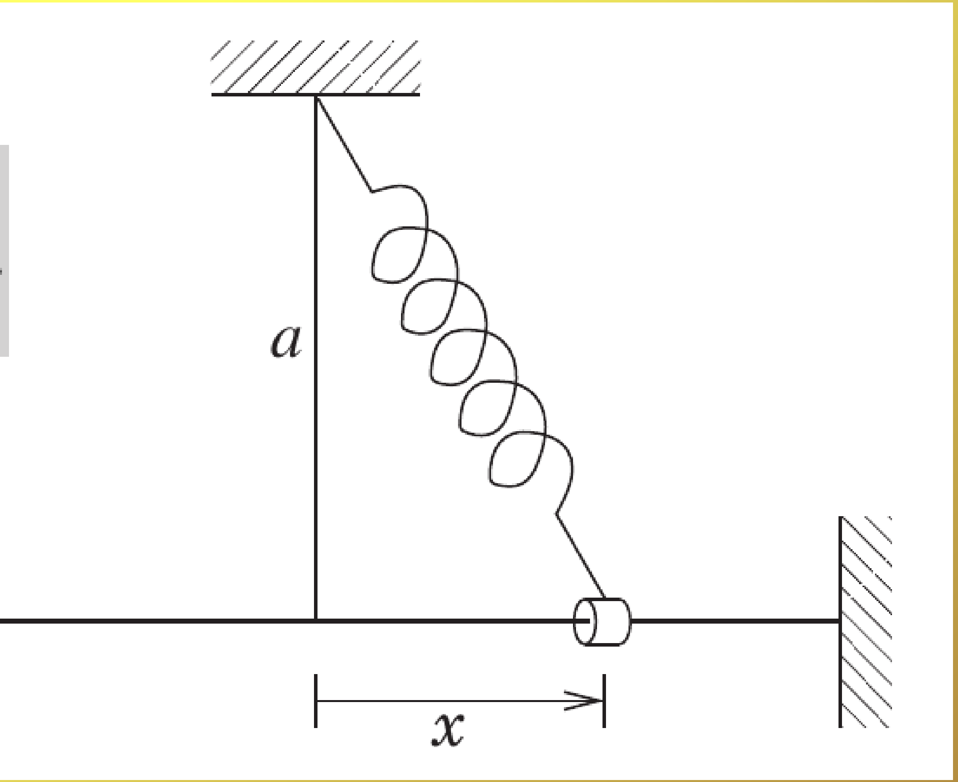
$$\alpha^{(0)} = \alpha(q^{(0)}) ,$$

- Lagrangiano de un oscilador armónico con frecuencia

$$\omega = \left(\frac{k^{(0)}}{\alpha^{(0)}}\right)^{1/2} .$$

Ejemplo: masa *m* sobre guía horizontal, unida por un resorte *(k, l)* a un punto fijo a distancia *a*

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2 + x^2} - l\right)^2 .$$



Determinar las posiciones de equilibrio y las oscilaciones en torno a las posiciones de equilibrio estable

- Los puntos de equilibrio están dados por

$$\frac{dV}{dx} = k\left(\sqrt{a^2 + x^2} - l\right)\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0\,,$$

- Existen 3 posibles soluciones

$$x = 0 \text{ and } x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}\ (\text{if } l > a)$$

- La estabilidad está dada por

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k\frac{x^2}{a^2+x^2} + k\left(\sqrt{a^2+x^2} - l\right)\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

Para *a* > *l*, la única solución, x=0, es estable

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=0} = k\left(1-\frac{l}{a}\right) > 0\,.$$

y la frecuencia de las oscilaciones $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{l}{a}\right)}\,.$

-

Para $a < l$, tenemos existen las 3 soluciones

$$x = 0 \text{ or } x = \pm\sqrt{l^2 - a^2}.$$

x=0 es inestable y las otras son estables

- $$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=\pm\sqrt{l^2-a^2}} = k\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) > 0\,,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)}$$

• Qué pasa si *a=l* ?

- La única posición de equilibrio es x=0 es estable pero no es un movimiento armónico (se anula el término de 2do grado y debemos quedarnos con el de 4to grado).

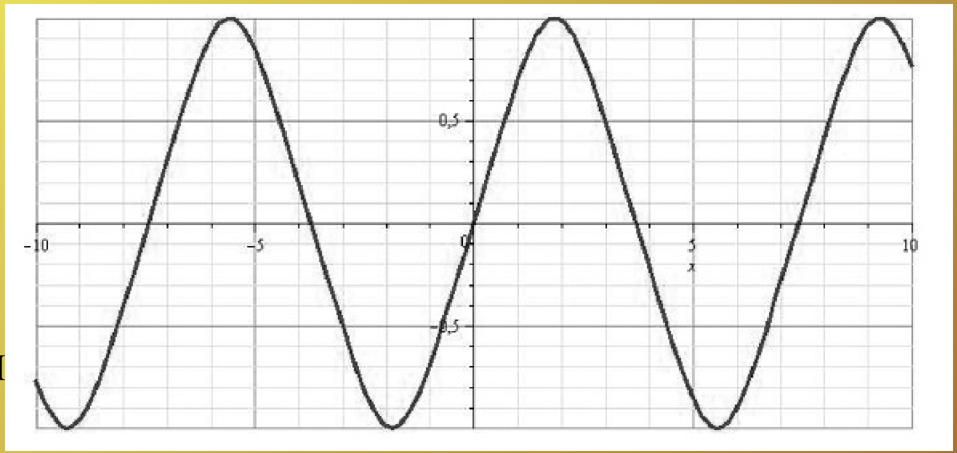
$$V(x) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)^2 = \frac{kl^2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} - 1\right)^2$$

$$V(x) = \frac{k}{8\,l^2}x^4 + O(x^6)\,.$$

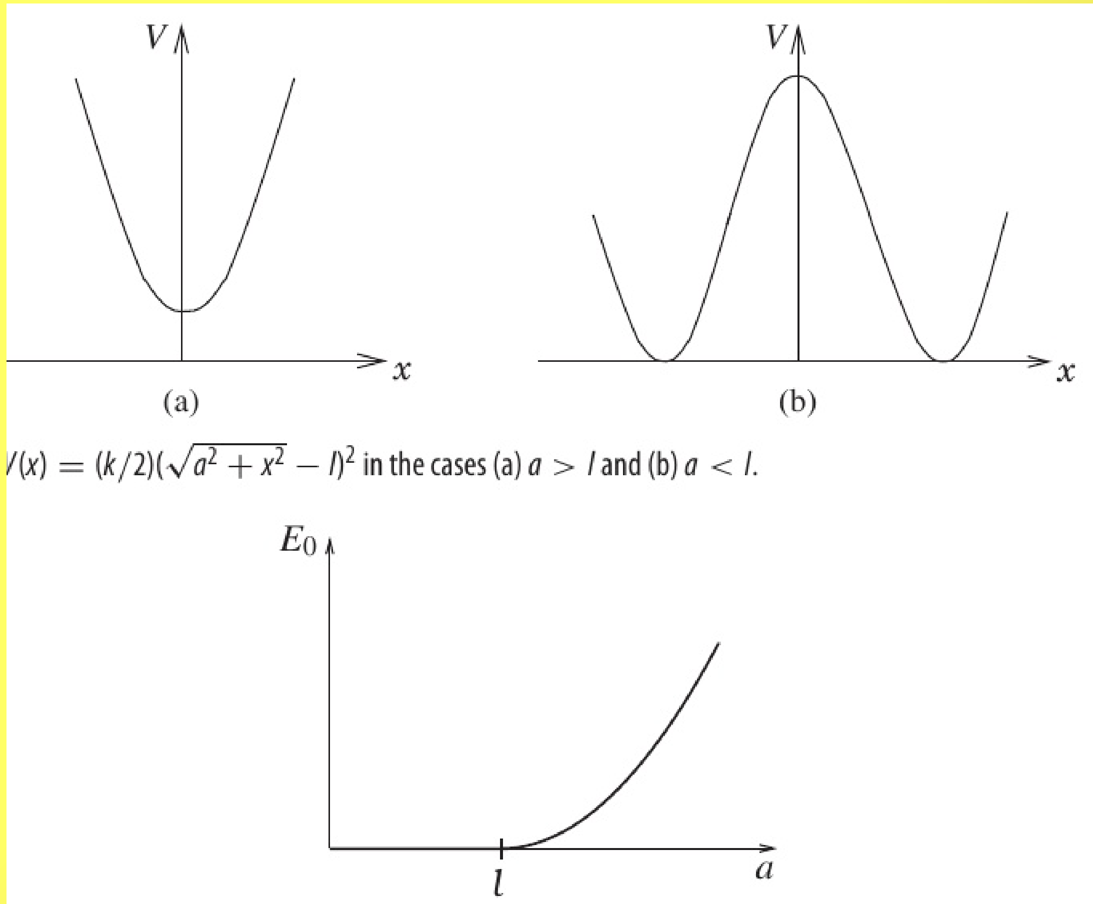
$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\lambda}{2}x^4\,,$$

$$\lambda = \frac{1}{12}\left.\frac{d^4V}{dx^4}\right|_{x=0} = \frac{k}{4l^2} > 0\,.$$

- Integrales elípticas



Discusión:



- Rompimiento espontáneo de simetría

Movimiento estacionario y pequeñas oscilaciones

- Situaciones de equilibrio dinámico
- Las coordenadas que no son cíclicas son constantes
- Ejemplo 1: partícula en un potencial central con órbitas circulares

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)\,.$$

$$(dV/dr)_{r=r_0} = p_\theta^2/(mr_0^3).$$

- Ejemplo 2: péndulo esférico

$$ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0\,,$$

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mgl(1-\cos\theta)\,.$$

$$\cos\theta_0 = g/(l\dot{\phi}^2) \text{ if } \dot{\phi}^2 > g/l.$$

Estabilidad de órbitas circulares

- Problema de Kepler

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{A}{r}$$

- El radio de las órbitas circulares

$$0 = \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{A}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 = \frac{p_\theta^2}{mA},$$

- La estabilidad está dada por la 2da derivada

$$k^{(0)} = \left(\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \frac{3p_\theta^2}{mr_0^4} - \frac{2A}{r_0^3} = \frac{A}{r_0^3} > 0,$$

- La frecuencia de las oscilaciones es

$$\omega = \left(\frac{k^{(0)}}{\alpha^{(0)}}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{r_0^3}\right)^{1/2}$$

Pequeñas Oscilaciones

* Pequeñas oscilaciones alrededor de pts. de equilibrio (muchos gr. libertad)

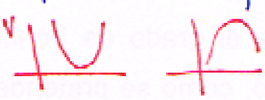
* Perturbaciones a movimientos estables

→ El sistema está en equilibrio cuando $Q_i = \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0 = 0$

(nos restringimos a sistemas escleronómicos)

$q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}$ es pos. de equilibrio puede ser → Estable

↳ Inestable



Def las desviaciones respecto al equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$

$$V(q_1 \ldots q_n) = V(q_{01}, \ldots q_{n0}) + \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0}_{0} \eta_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\eta_i \eta_j + \ldots$$

en la condición de equilibrio

$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2} V_{ij}\, \eta_i \eta_j$ donde por def. $V_{ij} = V_{ji}$

debe ser definida positiva porque sino no sería equilib. estable

$$T = T_2 = \frac{1}{2} m_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

$$m_{ij} = m_{ij}\Big|_0 + \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\eta_k \simeq m_{ij}\Big|_0$$

$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} T_{ij}\, \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ con $T_{ij} = T_{ji}$ además es def. positiva

$$L = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = \boxed{T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j = 0}$$ Ec. de mov.

Buscamos soluciones $\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}$ donde nos interesa la parte real.

$C \rightarrow$ factor escala introducido x conveniencia.

$$\Rightarrow \ddot{\eta}_i = -\omega^2 C a_i e^{-i\omega t}$$

$$-T_{ki}\omega^2 C a_i e^{-i\omega t} + V_{ki} C a_i e^{-i\omega t} = 0$$

$$(-T_{ki}\omega^2 + V_{ki}) C a_i e^{-i\omega t} = 0$$

Tenemos n ecuaciones lineales homogéneas para $a_i \Rightarrow$ el sistema puede tener solución ~~no~~ no trivial si

$$\det(V_{ki} - \omega^2 T_{ki}) = 0$$ Ec. característica

Una ecuación de grado n para $\omega^2 \Rightarrow$ tendremos varias soluciones ω_s^2

Para cada solución se buscan las amplitudes a_i, que están determinadas $n-1$.

Obs $(V_{ki} - \omega^2 T_{ki}) a_i = 0$

multiplicamos por $a_k^* \Rightarrow (V_{ki} - \omega^2 T_{ki}) a_i a_k^* = 0$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{V_{ki} a_i a_k^*}{T_{ki} a_i a_k^*}$$ de la simetría de V_{ki} y T_{ki}

deducimos que $\omega^2 \in \mathbb{R}$ y como son positivas $\omega^2 > 0$

La solución general es una superposición lineal

$$x_k(t) = A_{k\alpha}\, C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)$$

las cond. iniciales están dadas por
$$\left\{\begin{array}{l} \eta_i(0) = \mathrm{Re}\ C_k a_{ik} \\ \dot{\eta}_i(0) = \mathrm{Im}\ C_k a_{ik}\, \omega_k \end{array}\right.$$

donde $C_\alpha \in \mathbb{C}$ es un factor de escala.

Las $x_k(t)$ son una superposición de oscilaciones periódicas simples de amplitudes y fases arbitrarias.

Se puede definir $\theta_\alpha = C_\alpha \exp(i\omega_\alpha t) \Rightarrow$

$x_k = A_{k\alpha}\theta_\alpha$ es un conjunto de ecuaciones para θ_α,

resolviéndolas encontramos "las coordenadas normales" y las frecuencias normales: $\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0$

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2\right)$$

Ejemplo $\quad L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha x y$

$x_0 = y_0 = 0 \rightarrow$ P. de Equilibrio

$$T_{ij}\ddot{x}_j + V_{ij} x_j = 0 \quad j = 1, 2$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \alpha x = 0$$

$$x = A_x \exp(i\omega t)$$

$$y = A_y \exp(i\omega t)$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A_x - \alpha A_y = 0$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A_y - \alpha A_x = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \alpha \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1^2 = \omega_0^2 + \alpha \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 - \alpha \end{array}$$

1) $\alpha A_x - \alpha A_y = 0 \Rightarrow A_x = A_y$

$\alpha A_y - \alpha A_x = 0$

2) $-\alpha A_x - \alpha A_y = 0 \Rightarrow A_x = -A_y$

$-\alpha A_x - \alpha A_y = 0$

$$x = A_{x_1} C_1 \exp(i\omega_1 t) + A_{x_2} C_2 \exp(i\omega_2 t)$$

$$y = A_{y_1} C_1 \exp(i\omega_1 t) + A_{y_2} C_2 \exp(i\omega_2 t)$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$y(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} - A_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 = \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{2A_1}{2} e^{i\omega_1 t} \\[2em] \theta_2 = \dfrac{x-y}{2} = A_2 \exp(i\omega_2 t) \end{array}\right\} \text{Modos normales}$$