Ejercicio 1 (17 pts.). Para una interfaz plana que separa dos medios de impedancias específicas $z_1 = \rho_1 c_1$ y $z_2 = \rho_2 c_2$, suponga que incide una onda armónica plana con un ángulo θ_i. **(a)** Hallar los coeficientes de transmisión y reflexión de potencia en función del ángulo de incidencia y transmitido, y las impedancias de los medios. **(b)** Si las velocidades del sonido en los medios son $c_1 = 560 m/s$ y $c_2 = 800 m/s$ respectivamente, y el ángulo de incidencia $\theta_i = 23°$, indicar cuánto vale el cociente z_2/z_1 si no hay onda reflejada, es decir toda la potencia se transmite al segundo medio. **(c)** Hallar el ángulo crítico entre los dos medios **(d)** Si ahora consideramos que el 25% de la potencia incidente se refleja, calcular la intensidad de la onda reflejada si la onda que incide lo hace con un nivel de intensidad de 50 dB @10^{-12} W/m^2.

(a) El coeficiente de reflexión de potencia está dado por:

$$R_\pi = \left[\frac{z_2 cos\theta_i - z_1 cos\theta_t}{z_2 cos\theta_i + z_1 cos\theta_t}\right]^2$$

Sabemos que el coeficiente de transmisión de potencia queda dado por $T_\pi = 1 - R_\pi$ y por lo tanto:

$$T_\pi = \frac{4 z_1 z_2 cos\theta_i cos\theta_t}{(z_2 cos\theta_i + z_1 cos\theta_t)^2}$$

(b) Si no hay onda reflejada entonces $R_\pi = 0$, por lo tanto:

$$z_2 cos\theta_i - z_1 cos\theta_t = 0$$

De la ley de Snell: $cos\theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2(\theta_i)}$

$$\Rightarrow z_2 cos\theta_i - z_1 cos\theta_t = z_2 cos\theta_i - z_1 \left(1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2(\theta_i)\right)^{1/2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2(\theta_i)\right)^{1/2}}{cos\theta_i} = 0.9$$

(c)

$$\theta_c = Asin\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = 44{,}4°$$

(d)

$$R_\pi = R_I = \frac{I_r}{I_i} = 0.25$$

Las intensidades en función de su nivel de intensidad (NI) se puede escribir como:

$$I_i = I_{ref} 10^{\frac{(NI)_i}{10}}$$

$$I_r = I_{ref} 10^{\frac{(NI)_r}{10}}$$

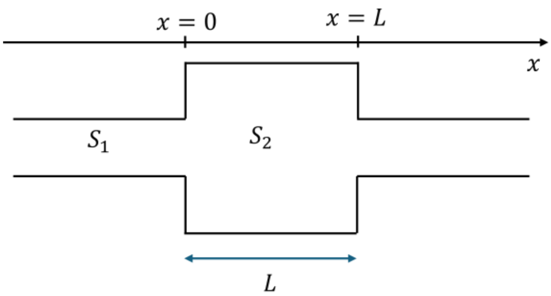
Por lo tanto:

$$0.25 = \frac{10^{\frac{(NI)_r}{10}}}{10^{\frac{(NI)_i}{10}}} = 10^{((NI)_r - (NI)_i)/10}$$

$$\Rightarrow 10 \log_{10}(0.25) = (NI)_r - (NI)_i$$

$$\Rightarrow (NI)_r = (NI)_i + 10 \log_{10}(0.25) = 44\ dB$$

Ejercicio 2 (18 pts.). Considere un tubo infinito de sección transversal S_1. Suponga que el tubo contiene una cámara de largo L con una sección mayor S_2 como se muestra en la figura. Desde la rama izquierda incide una onda de frecuencia ω tal que la longitud de onda cumple $\lambda \gg S_1^{1/2}; S_2^{1/2}$. **(a)** Hallar el coeficiente de transmisión hacia la rama derecha del tubo. **Sugerencia:** Plantear las condiciones de borde apropiadas en $x = 0$ y $x = L$. A partir de allí despejar los coeficientes apropiados para obtener la relación buscada. **(b)** Discutir los casos $kL = 2n\pi$ y $kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi; n = 1,2,3 ...$



(a) Podemos escribir la onda acústica en cada tramo del tubo como:

$$P_i' = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$
$$P_2' = Ce^{-ikx} + De^{ikx}$$
$$P_t' = Ee^{-ikx}$$

De la ecuación de Euler tenemos la velocidad particular en cada tramo del tubo:

$$v_i = \frac{ik}{i\omega\rho_0}\left[Ae^{-ikx} - Be^{ikx}\right]$$
$$v_2 = \frac{ik}{i\omega\rho_0}\left[Ce^{-ikx} - De^{ikx}\right]$$
$$v_t = \frac{ik}{i\omega\rho_0}Ee^{-ikx}$$

El objetivo es hallar el cociente E/A. Para ello, escribimos ahora las condiciones de borde en $x = 0$:

$$P_i' = P_2' \Rightarrow A + B = C + D \qquad (1)$$

$$S_1 v_i = S_2 v_2 \Rightarrow \frac{1}{Z_{v1}}(A - B) = \frac{1}{Z_{v2}}(C - D) \qquad (2)$$

La ecuación (1) representa la continuidad de la presión y la ecuación (2) representa la continuidad de la velocidad volumétrica. En esta última expresión, $Z_v = \rho_0 c/S$ es la impedancia volumétrica. Escribimos ahora las condiciones de borde en $x = L$ que físicamente representan lo mismo, pero en el borde derecho:

$$P_2' = P_t' \Rightarrow Ce^{-ikL} + De^{ikL} = Ee^{-ikL} \qquad (3)$$

$$S_2 v_2 = S_1 v_t \Rightarrow \frac{1}{Z_{v2}}\left(Ce^{-ikL} - De^{ikL}\right) = \frac{1}{Z_{v1}}Ee^{-ikL} \qquad (4)$$

De la ecuación (3) tenemos:

$$De^{ikL} = (E - C)e^{-ikL} \Rightarrow D = (E - C)e^{-2ikL}$$

Sustituimos el valor del coeficiente D en la ecuación (4), lo que permite hallar C en términos de E:

$$\frac{1}{Z_{v2}}\left[Ce^{-ikL} - (E - C)e^{-ikL}\right] = \frac{1}{Z_{v1}}Ee^{-ikL}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{Z_{v2}}Ce^{-ikL} = Ee^{-ikL}\left(\frac{1}{Z_{v1}} + \frac{1}{Z_{v2}}\right)$$
$$\Rightarrow C = \frac{E}{2}\left(1 + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right) = E\left(\frac{Z_{v1} + Z_{v2}}{2Z_{v1}}\right)$$

Con esta expresión podemos también escribir el coeficiente D en términos de E:

$$\Rightarrow D = (E - C)e^{-2ikL} = E\left(1 - \left(\frac{Z_{v1} + Z_{v2}}{2Z_{v1}}\right)\right)e^{-2ikL}$$

$$= E\left(\frac{2Z_{v1} - Z_{v1} - Z_{v2}}{2Z_{v1}}\right)e^{-2ikL} = E\left(\frac{Z_{v1} - Z_{v2}}{2Z_{v1}}\right)e^{-2ikL} = D$$

Podemos ahora sustituir los coeficientes C, D en la ecuación (2) para obtener el coeficiente B en términos de los coeficientes A, E:

$$\frac{1}{Z_{v1}}(A - B) = \frac{E}{Z_{v2}}\left[\frac{Z_{v1} + Z_{v2} - (Z_{v1} - Z_{v2})e^{-2ikL}}{2Z_{v1}}\right]$$

$$= \frac{Ee^{-ikL}}{2Z_{v1}Z_{v2}}\left[Z_{v1}\left(e^{ikL} - e^{-ikL}\right) + Z_{v2}\left(e^{ikL} + e^{-ikL}\right)\right]$$

$$= \frac{Ee^{-ikL}}{Z_{v1}Z_{v2}}[Z_{v2}\cos(kL) + iZ_{v1}\sin(kL)]$$

$$\Rightarrow B = A - \frac{Ee^{-ikL}}{Z_{v2}}[Z_{v2}\cos(kL) + iZ_{v1}\sin(kL)]$$

Finalmente, sustituimos esta expresión para B en la ecuación (1) lo que nos deja una ecuación en términos de A y E de donde podemos obtener el cociente E/A:

$$A + A - \frac{Ee^{-ikL}}{Z_{v2}}[Z_{v2}\cos(kL) + iZ_{v1}\sin(kL)] = E\left[\frac{Z_{v1} + Z_{v2}}{2Z_{v1}} + \left(\frac{Z_{v1} - Z_{v2}}{2Z_{v1}}\right)e^{-2ikL}\right]$$

$$= \frac{Ee^{-ikL}}{2Z_{v1}}\left[Z_{v1}\left(e^{ikL} + e^{-ikL}\right) + Z_{v2}\left(e^{ikL} - e^{-ikL}\right)\right]$$

$$= \frac{Ee^{-ikL}}{Z_{v1}}[Z_{v1}\cos(kL) + iZ_{v2}\sin(kL)]$$

$$\Rightarrow 2A = Ee^{-ikL}\left[2\cos(kL) + i\sin(kL)\left(\frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{E}{A} = 2e^{ikL}\left[2\cos(kL) + i\sin(kL)\left(\frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right)\right]^{-1}$$

(b) Si consideramos que $kL = 2n\pi \Rightarrow \cos(kL) = 1\,; \sin(kL) = 0; e^{ikL} = 1$. De manera que:

$$\frac{E}{A} = \frac{2}{2} = 1$$

Es decir que la amplitud de la onda transmitida es igual a la de la onda incidente. Podemos ver que para esta condición se cumple $B = 0$. De manera que para esta frecuencia es como si la cámara ensanchada del tubo no existiera.

Si ahora consideramos que $kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \cos(kL) = 0\,; \sin(kL) = \pm 1; e^{ikL} = \pm i$. De manera que:

$$\frac{E}{A} = \frac{\pm 2i}{\pm i\left(\frac{Z_{v1}}{Z_{v2}} + \frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right)} = 2\left(\frac{Z_{v1}Z_{v2}}{Z_{v1}^2 + Z_{v2}^2}\right)$$

$$= 2\frac{\left(\frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right)}{1+\left(\frac{Z_{v2}}{Z_{v1}}\right)^2}$$

Usando la definición de impedancia volumétrica $Z_v = \rho_0 c/S$ tenemos:

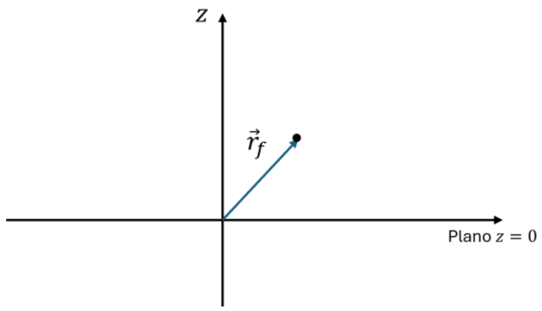
$$= 2\frac{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)}{1+\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$$

Vemos que si $S_2 \gg S_1 \Rightarrow E/A \cong 0$.

Ejercicio 3 (15 pts.). Suponga una fuente puntual ubicada en una posición por encima del plano z = 0 como indica la figura. Suponga que sobre el plano z = 0 la presión acústica P' es nula. Se desea determinar el campo acústico de esta fuente en el semi-espacio $z > 0$. A partir del teorema de representación acústica,

$$P'(\vec{r}) = \int_{V_0} f(\vec{r}_0)G(\vec{r}_0,\vec{r})\,dV_0 + \int_{S_0} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})]\cdot \hat{n}\,dS_0$$

hallar la función de Green $G(\vec{r}_0, r)$ apropiada para este problema.



La superficie de integración del segundo término del teorema de representación debe ser tal que encierre al volumen de interés. En este caso el volumen es el semi-espacio $z > 0$. Podemos entonces elegir como superficie de integración S_0 la suma de dos superficies S_1 y S_2, siendo S_1 el plano $z = 0$ y S_2 una semi-esfera de radio infinito sobre el plano. De manera que:

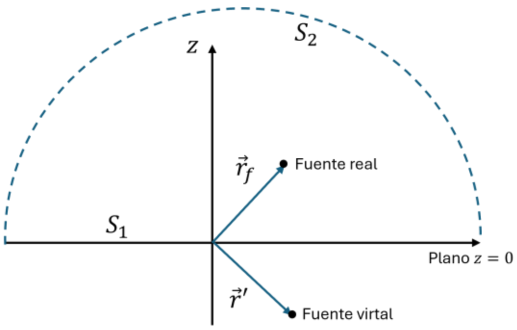
$$\int_{S_0} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})] \cdot \hat{n}\, dS_0$$
$$= \int_{S_1} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})] \cdot \hat{n}\, dS_1$$
$$+ \int_{S_2} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})] \cdot \hat{n}\, dS_2$$

La segunda integral es nula debido a la condición de radiación de Sommerfeld. Por lo tanto:

$$\int_{S_0} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})] \cdot \hat{n}\, dS_0$$
$$= \int_{S_1} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})] \cdot \hat{n}\, dS_1$$

Ahora, por la condición de borde del problema sabemos que $P'(\vec{r}_0) = 0$ si $\vec{r}_0 \in S_1$ de manera que:

$$\int_{S_0} [G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) - P'(\vec{r}_0)\nabla G(\vec{r}_0,\vec{r})] \cdot \hat{n}\, dS_0 = \int_{S_1} G(\vec{r}_0,\vec{r})\nabla P'(\vec{r}_0) \cdot \hat{n}\, dS_1$$



Para resolver esta integral deberíamos conocer el campo acústico P', pero no lo conocemos. En consecuencia, debemos elegir la función $G(\vec{r}_0,\vec{r})$ de manera que sea nula si $\vec{r}_0 \in S_1$. Conocemos la función de Green del espacio libre, de modo que podemos sumar otro término que obedezca la ecuación de Hemholtz homogénea y que cumpla la condición de borde deseada. Para ello vamos a utilizar una fuente virtual, simétrica a la fuente real con respecto al plano $z = 0$ y que esté desfasada 180º:

$$G(\vec{r}_f, \vec{r}\,) = \frac{A}{4\pi|\vec{r}_f - \vec{r}|} e^{-ik|\vec{r}_f - \vec{r}|} - \frac{A}{4\pi|\vec{r}\,' - \vec{r}|} e^{-ik|\vec{r}\,' - \vec{r}|}$$

De acuerdo a la figura, vemos que si $\vec{r}$ está en el plano $z = 0$, $|\vec{r}_f - \vec{r}| = |\vec{r}\,' - \vec{r}|$ y en consecuencia $G(\vec{r}_f, \vec{r}) = 0$ que es lo que buscábamos. Esta función se la denomina G_-.
Finalmente, el campo de la fuente puntual en el semi-espacio $z > 0$ está dado por:

$$P'(\vec{r}) = \int_{V_0} f(\vec{r}_0) G_-(\vec{r}_0, \vec{r}) dV_0$$