EXAMEN ONDAS

PERÍODO REGULAR

24/07/2024

Ejercicio 1. Considere una cuerda finita de largo L que es excitada en $x = 0$ por un forzante de la forma $F_0 e^{i\omega t}$ y que está fija en el otro extremo ($x = L$). (a) Probar que la solución de la onda que se genera en la cuerda es:

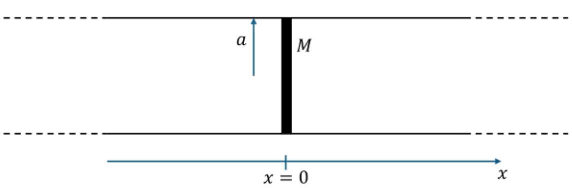
$$y(x,t) = \frac{F_0}{k|\vec{T}|} \frac{\sin[k(L-x)]}{\cos(kL)} e^{i\omega t}$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda y $|\vec{T}|$ es la tensión de la cuerda. (b) Mostrar que la distancia entre dos nodos consecutivos es $\lambda/2$ donde λ es la longitud de onda. (c) Encuentre una expresión para la impedancia mecánica de entrada. ¿Qué sucede con la potencia entregada por el forzante a la cuerda? (d) A partir de la expresión anterior encuentre las frecuencias de resonancia del sistema. ¿Es coherente con la parte (a)?

Ejercicio 2. Considere una onda de gravedad de frecuencia ω que se propaga en la dirección x positiva en un canal de profundidad h. El canal se puede considerar infinito en la dirección y de manera que el potencial de velocidades modificado está dado por:

$$\phi'(x,z,t) = Ae^{-kh}\cosh(k(z+h))\cos(\omega t - kx)$$

Notar que esta solución es válida para $z \leq 0$. (a) Hallar la velocidad particular del fluido. (b) Hallar la trayectoria de las partículas de fluido cercanas a la superficie. Mostrar que, si se trata de aguas profundas, las trayectorias son circulares. **Sugerencia:** a partir del resultado de la parte (a), hallar el desplazamiento en las direcciones x, z y luego eliminar el tiempo entre estas expresiones.



Ejercicio 3. Un tubo de paredes rígidas, sección circular de radio a y longitud infinita contiene un pistón de masa M en su sección transversal en la posición $x = 0$ que puede moverse sin fricción, como se muestra en la figura. Considere una onda armónica que proviene desde las x negativas. (a) Si la frecuencia de la onda es tal que $ka \ll 1$, hallar los coeficientes de reflexión y transmisión. (b) Estudiar los límites $k\chi \gg 1$ y $k\chi \ll 1$ donde k es el número de onda y

$$\chi = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{M}{\pi a^2}\right)$$

Discutir el significado físico de estos límites. (c) Si ahora quitamos la restricción $ka \ll 1$, discutir cómo se modifican las condiciones de borde en $x = 0$.

FÓRMULAS ÚTILES

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha)$$

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin(\alpha)$$

$$e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2\cosh(\alpha)$$

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2\sinh(\alpha)$$

En todas estas expresiones $\alpha \in \mathbb{R}$

En una guía de ondas infinita de sección circular de radio a y borde rígido, los modos de propagación están dados por:

$$P'_{mn}(r,\theta,x,t) = A_{mn}J_m(k_{mn}r)\cos(m\theta)\,e^{i(\omega t - k_x x)}$$

donde:

$$k_{mn} = \frac{j'_{mn}}{a};\ k_x = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2};\ k = \omega/c$$

y el eje x es el eje de la guía.