Ejercicio 1. Considere una cuerda finita de largo L que es excitada en $x = 0$ por un forzante de la forma $F_0 e^{i\omega t}$ y que está fija en el otro extremo ($x = L$). (a) Probar que la solución de la onda que se genera en la cuerda es:

$$y(x,t) = \frac{F_0}{k|\vec{T}|}\frac{\sin[k(L-x)]}{\cos(kL)}e^{i\omega t}$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda y $|\vec{T}|$ es la tensión de la cuerda. (b) Mostrar que la distancia entre dos nodos consecutivos es $\lambda/2$ donde λ es la longitud de onda. (c) Encuentre una expresión para la impedancia mecánica de entrada. ¿Qué sucede con la potencia entregada por el forzante a la cuerda? (d) A partir de la expresión anterior encuentre las frecuencias de resonancia del sistema. ¿Es coherente con la parte (a)?

(a) Suponemos ondas viajando en ambos sentidos:

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

La condición de borde en $x = 0$ es:

$$F_0 e^{i\omega t} + |\vec{T}|\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_0 + ik(B - A) = 0$$

La condición de borde en $x = L$ es:

$$y(x = L, t) = 0 \Rightarrow Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = 0 \Rightarrow B = -Ae^{-2ikL}$$

Sustituyendo en la primer ecuación encontramos:

$$F_0 - ik|\vec{T}|A\left(e^{-2ikL} + 1\right) = F_0 - ik|\vec{T}|Ae^{-ikL}\left(e^{-ikL} + e^{ikL}\right) = 0$$

De manera que:

$$F_0 - 2ik|\vec{T}|Ae^{-ikL}\cos(kL) = 0 \Rightarrow A = \frac{F_0 e^{ikL}}{2ik|\vec{T}|\cos(kL)}$$

De manera que:

$$B = -\frac{F_0 e^{-ikL}}{2ik|\vec{T}|\cos(kL)}$$

$$\Rightarrow y(x,t) = \frac{F_0}{2ik|\vec{T}|\cos(kL)}\left(e^{ik(L-x)} - e^{-ik(L-x)}\right)e^{i\omega t} = \frac{F_0}{k|\vec{T}|}\frac{\sin\left(k(L-x)\right)}{\cos(kL)}e^{i\omega t}$$

(b) La posición de los nodos está dada por: $\sin\left(k(L-x)\right) = 0$

$$\Rightarrow k(L-x) = n\pi \Rightarrow x_n = L - \frac{n\pi}{k} = L - n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

De manera que :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

(c) La impedancia mecánica en la entrada está dada por:

$$z = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{v(0,t)} = \frac{k|\vec{T}|F_0 e^{i\omega t}}{F_0 e^{i\omega t}(i\omega)} \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} = -i\frac{k}{\omega}|\vec{T}| = -i\rho c \tan^{-1}(kL)$$

Donde hemos usado $\omega = kc$ y $|\vec{T}| = \rho c^2$. Como es puramente reactiva esto indica que no hay potencia disipada por la cuerda. Es consecuencia de que el extremo $x = L$ es fijo, toda la energía se refleja.

(d) Son las frecuencias para el cual la reactancia se hace cero: $\cos(kL) = 0$

$$\Rightarrow kL = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow f_n = \frac{c}{L}\frac{2n-1}{4}$$

Es la misma condición para el cual $y(x,t)$ tiene máxima amplitud (parte (a)).

Ejercicio 2. Considere una onda de gravedad de frecuencia ω que se propaga en la dirección x positiva en un canal de profundidad h. El canal se puede considerar infinito en la dirección y de manera que el potencial de velocidades modificado está dado por:

$$\phi'(x,z,t) = Ae^{-kh}\cosh(k(z+h))\cos(\omega t - kx)$$

Notar que esta solución es válida para $z \leq 0$. (a) Hallar la velocidad particular del fluido. (b) Hallar la trayectoria de las partículas de fluido cercanas a la superficie. Mostrar que, si se trata de aguas profundas, las trayectorias son circulares. **Sugerencia:** a partir del resultado de la parte (a), hallar el desplazamiento en las direcciones x, z y luego eliminar el tiempo entre estas expresiones.

(a) La velocidad particular del fluido se obtiene de:

$$\vec{v} = \nabla\phi' = kAe^{-kh}\cosh(k(z+h))\sin(\omega t - kx)\ \hat{x} + kAe^{-kh}\sinh(k(z+h))\cos(\omega t - kx)\,\hat{z}$$

Cerca de la superficie tenemos $z \cong 0$ y por lo tanto:

$$v_x = kAe^{-kh}\cosh(kh)\sin(\omega t - kx)\ ;\ v_z = kAe^{-kh}\sinh(kh)\cos(\omega t - kx)$$

(b) Los desplazamientos en cada dirección están dados por:

$$\xi_x = -\frac{k}{\omega}Ae^{-kh}\cosh(kh)\cos(\omega t - kx)\,; \xi_z = \frac{k}{\omega}Ae^{-kh}\sinh(kh)\sin(\omega t - kx)$$

$$\sin(\omega t - kx) = \frac{c_f \xi_z}{A}\frac{e^{kh}}{\sinh(kh)} \Rightarrow \cos(\omega t - kx) = \left[1 - \left(\frac{c_f \xi_z}{A}\frac{e^{kh}}{\sinh(kh)}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \xi_x = -\frac{A}{c}e^{-kh}\cosh(kh)\left[1 - \left(\frac{v_z}{kA}\frac{e^{kh}}{\sinh(kh)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_f \xi_x}{A} \frac{e^{kh}}{\cosh(kh)}\right)^2 + \left(\frac{c_f \xi_z}{A} \frac{e^{kh}}{\sinh(kh)}\right)^2 = 1$$

donde $c_f = \omega/k$ es la velocidad de fase de la onda. De manera que:

$$\frac{\xi_x^2}{\cosh^2(kh)} + \frac{\xi_z^2}{\sinh^2(kh)} = \left(\frac{A}{c_f} e^{-kh}\right)^2$$

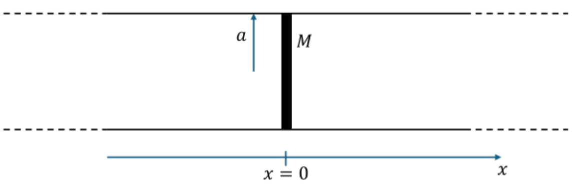
Esta ecuación describe la trayectoria de los elementos de volumen del fluido cuando pasa la onda de gravedad. Esta figura es en general una elipse. En el caso de aguas profundas tenemos $kh \gg 1$ y por lo tanto:

$$\cosh(kh) \cong \sinh(kh) \cong e^{kh}$$

De manera que:

$$\xi_x^2 + \xi_z^2 \cong \left(\frac{A}{c_f}\right)^2$$

Esta ecuación representa un círculo de radio A/c_f.



Ejercicio 3. Un tubo de paredes rígidas, sección circular de radio a y longitud infinita contiene un pistón de masa M en su sección transversal en la posición $x = 0$ que puede moverse sin fricción, como se muestra en la figura. Considere una onda armónica que proviene desde las x negativas. (a) Si la frecuencia de la onda es tal que $ka \ll 1$, hallar los coeficientes de reflexión y transmisión. (b) Estudiar los límites $k\chi \gg 1$ y $k\chi \ll 1$ donde k es el número de onda y

$$\chi = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{M}{\pi a^2}\right)$$

Discutir el significado físico de estos límites. (c) Si ahora quitamos la restricción $ka \ll 1$, discutir cómo se modifican las condiciones de borde en $x = 0$.

(a) Podemos escribir la presión dentro del tubo como dos ondas, una a la izquierda del pistón P_1' que se compone de una onda incidente y una onda reflejada y otra a la derecha del tubo que se compone de una onda que viaja en sentido positivo de x. Además, en el límite de baja frecuencia no hay dispersión por lo que la amplitud de cada una de estas ondas es constante.

$$P_1' = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$

$$P_2' = Ce^{-ikx}$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial P_1'}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c}(Ae^{-ikx} - Be^{ikx})$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial P_2'}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c} C e^{-ikx}$$

Las condiciones de borde en en $x = 0$ son:

$$(P_1' - P_2')\pi a^2 = M\frac{\partial v_1}{\partial t}$$

$$v_1 = v_2$$

De la primera de estas ecuaciones tenemos:

$$A + B - C = \frac{i\omega}{\rho_0 c}\left(\frac{M}{\pi a^2}\right)(A - B)$$

De la segunda ecuación tenemos:

$$C = A - B$$

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$A + B - A + B = \frac{i\omega}{\rho_0 c}\left(\frac{M}{\pi a^2}\right)(A - B)$$

Vamos a definir $\rho_P = M/(\pi a^2)$ y $\chi = \rho_P/\rho_0$. Usamos además que $k = \omega/c$ de manera que la expresión anterior la podemos escribir como:

$$2B = ik\chi(A - B) \ \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{ik\chi}{2 + ik\chi} = \frac{k\chi}{k\chi - 2i}$$

$$C = A - B \Rightarrow \frac{C}{A} = -\frac{2i}{k\chi - 2i}$$

(b) Si $k\chi \gg 1$ el pistón se asemeja a un borde rígido y $B/A \cong 1$ mientras que $C/A \cong 0$. Por el contrario, si $k\chi \ll 1$ la situación se asemeja a una sin pistón y por lo tanto $B/A \cong 0$ mientras que $C/A \cong 1$.

(c) Si ahora quitamos la restricción $ka \ll 1$ las ondas dentro del tubo pueden ser guiadas y tener dispersión, de manera que la onda incidente se puede escribir como la suma de modos normales de propagación:

$$P_i' = \sum_{m,n} A_{mn} J_m(k_{mn} r)\cos(m\theta)\, e^{i(\omega t - k_x x)}$$

Donde:

$$k_x = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}\ ;\ k_{mn} = \frac{j_{mn}'}{a}; k = \omega/c$$

De manera similar, la onda reflejada y la onda transmitida se pueden escribir como:

$$P_r' = \sum_{m,n} B_{mn} J_m(k_{mn} r) \cos(m\theta)\, e^{i(\omega t + k_x x)}$$

$$P_t' = \sum_{m,n} C_{mn} J_m(k_{mn} r) \cos(m\theta)\, e^{i(\omega t - k_x x)}$$

Ahora las condiciones de borde en $x = 0$ se escriben en forma genérica:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a} (P_i' + P_r' - P_t')\, r dr\, d\theta = -\frac{i\omega M}{i\omega \rho_0} \frac{\partial P_t'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (P_i' + P_r')}{\partial x} = \frac{\partial P_t'}{\partial x}$$

Estas ecuaciones permiten obtener los coeficientes de reflexión y transmisión para cada modo normal, suponiendo que se pueda realizar la integral de superficie de la primera de ellas.