

Práctico 1

Ecuaciones de continuidad de la masa y equilibrio hidrostático. Perfil de densidad y energía potencial gravitatoria.

1. Considere una serie de sistemas estelares binarios constituidos por estrellas de igual masa $M = M_{\odot}$ y radio $R = R_{\odot}$ cuyos componentes están separados una distancia promedio d . Estime la razón entre las fuerzas de gravedad que cada estrella ejerce sobre una partícula ubicada en la superficie de una de las estrellas como función de d . ¿En qué rangos de d considera que la aproximación de aislamiento de las estrellas es válida?
2. Suponga una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

- (a) Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$ y gráfiquela para distintos valores de ρ_c
- (b) Derive una relación entre M y R
- (c) Demuestre que la densidad promedio viene dada por $0,4\rho_c$
- (d) ¿Cuánto vale, según este perfil de densidad, la densidad central del Sol?

(Versión del ejercicio 1.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)

3. Considere una estrella de masa M y radio R .
 - (a) Encuentre el valor de la presión central P_c para el caso de una densidad uniforme $\rho = \rho_c$ y verifique que se cumple la inecuación $P_c > GM^2/8\pi R^4$ con G la constante de gravitación universal.
 - (b) Verifique que la inecuación anterior se cumple también para el caso en que la densidad $\rho(r)$ viene dada por:

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

4. Suponga que una estrella de masa M alcanza su máxima densidad ρ_c en su centro donde su presión vale P_c . Muestre que P_c y ρ_c están relacionadas por:

$$P_c < (4\pi)^{1/3} 0,347 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

(Versión del ejercicio 2.2 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)

5. Para una estrella de masa M y radio R encuentre el valor del coeficiente α de la expresión para la energía potencial gravitatoria $E_g = -\alpha GM^2/R$ que queda determinado por el perfil de densidad $\rho = \rho(r)$ para los siguientes casos: *(Versión del ejercicio 2.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)*
 - (a) Para un perfil de densidad uniforme $\rho(r) = \rho_c$
 - (b) Para un perfil de densidad dado por:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

6. A partir de la ecuación de continuidad $dm = 4\pi\rho(r)r^2dr$ y considerando que la densidad $\rho(r)$ viene dada por:

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

donde ρ_c es la densidad en el centro de la estrella de radio R :

- (a) Demuestre que la masa contenida entre el centro y un radio interno r viene dada, en términos de la variable $x = r/R$, por:

$$m(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c \left(x^3 - \frac{3}{4}x^4\right)$$

- (b) Demuestre que la masa total de la estrella M viene dada por:

$$M = \frac{\pi}{3}R^3 \rho_c$$

- (c) Empleando la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que la presión P como función de la coordenada radial adimensional x puede ser expresada como:

$$P = \frac{5}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \left(1 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{28}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^4\right)$$

- (d) ¿Cuál es y cómo se compara la presión central con la cota mínima?

$$P_c > \frac{G}{4\pi} \frac{M^2}{R^4} \quad (1)$$

7. Se pueden establecer límites útiles a la presión central de una estrella sin recurrir a cálculos detallados de su estructura. Considere una estrella de masa M y radio R . Sea $P(r)$ la presión a la distancia r del centro y $m(r)$ la masa encerrada por una esfera de radio r . (*Versión del ejercicio 2 del práctico 4 de Julio Fernández*)

- (a) Demuestre que en equilibrio hidrostático la función $P(r) + Gm^2/8\pi r^4$ decrece con r
 (b) A partir del resultado demuestre que la presión central satisface la desigualdad

$$P_c > \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G\bar{\rho}^{4/3} M^{2/3}$$

- (c) Si se asume además que la densidad $\rho(r)$ decrece con r , se puede derivar un límite inferior más estricto y, además, un límite superior significativo para la presión central. Demuestre en este caso que:

$$P_c > \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G\bar{\rho}^{4/3} M^{2/3}$$

- (d) Demuestre que:

$$P_c < \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G\rho_c^{4/3} M^{2/3}$$

8. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que en una estrella hipotética constituida por un gas incompresible y en reposo, la presión P aumenta linealmente con la profundidad respecto de la superficie y cerca de ella.

9. Encuentre una expresión para la energía potencial gravitatoria U_g de una distribución esférica de masa M y radio R con un perfil de densidad de masa $\rho(r)$ arbitrario. A partir de esa expresión demuestre que en el caso de un perfil uniforme $\rho(r) = \bar{\rho}$ la energía potencial gravitatoria U_g viene dada por

$$U_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

10. Asuma que el Sol está constituido por un gas ideal que se encuentra en equilibrio hidrostático y que su densidad central ρ_c se relaciona con su densidad promedio $\bar{\rho}$ según $\rho_c = r\bar{\rho}/0,4$. Estime una cota mínima para su temperatura central T_c .
11. Suponga una estrella de masa M , radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right]$$

con $n = 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty$

- Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$ y gráfiquela para un dado valor de ρ_c y distintos valores de n
- Derive una relación entre M y R
- Encuentre una expresión para la densidad promedio $\bar{\rho}$ como función de n y de ρ_c
- Encuentre una expresión para la presión P como función de la coordenada radial r y de la variable adimensional $x = r/R$
- Encuentre una expresión para la presión central P_c
- Compare P_c con la cota $P_c < (4\pi)^{1/3} 0,347 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$
- Compare P_c con la cota $P_c > GM^2/8\pi R^4$
- ¿Cuánto vale la densidad central como función de la densidad promedio para distintos valores de n ?
- Encuentre una expresión para α como función de n .