Práctico 4
Presiones debidas a los gases de iones, electrones y fotones.

1. Bajo condiciones muy generales la presión central P_c que soporta una estrella de masa M satisface la desigualdad $P_c < (\pi/6)^{1/3} G M^{2/3} \rho_c^{4/3}$ donde ρ_c es la densidad central. Se asume que parte de esta presión, denotada por $P_g = \beta Pc$, se debe a un gas ideal clásico de electrones e iones con masas promedio $\bar{m}$ y que la presión restante, denotada por $P_r = (1-\beta)Pc$ se debe a la radiación. *(Versión del ejercicio 1 del práctico 5 de Julio Fernández)*
   (a) Deduzca a partir de la desigualdad para P_c un límite superior para la cantidad $\eta = (1-\beta)/\beta^4$ como función de M y $\bar{m}$.
   (b) A partir del límite superior calculado para η, establezca cuáles son los límites para la fracción de la presión debida a la radiación P_r en el centro de estrellas de masas 1 $M_\odot$, 4 $M_\odot$ y 40 $M_\odot$, asumiendo que la estrella está constituida por Hidrógeno totalmente ionizado.

2. Considere una estrellas de masa $M = M_\odot$ y radio $R = R_\odot$ en la que a una distancia $r = R/2$ del centro la presión vale $P(r = R/2) = 1{,}3 \times 10^{15} dina/cm^2$ y la temperatura $T(r = R/2) = 4{,}5 \times 10^6 K$. Demuestre que bajo estas condiciones la presión de radiación es mucho menor que la presión del gas.

3. Considere una serie de estrellas de masa M_i. Realice un gráfico de la razón entre la energía potencial eléctrica U_E y la energía cinética K de una de sus partículas como función de M_i para dos casos hipotéticos de estrellas constituidas exclusivamente de H y exclusivamente de He.

4. El límite de masas que separa a las estrellas de las enanas marrones se ubica aproximadamente en $\sim 0{,}072\ M_\odot$ y el límite de masas que separa a las enanas marrones de los planetas en $\sim 0{,}01\ M_\odot$. En base a los gráficos de la pregunta anterior: ¿Qué puede decir sobre la ecuación de estado del gas para estrellas con masas M en los intervalos $M > M_\odot$, $1 < M/M_\odot < 0{,}072$ y $0{,}072 < M/M_\odot < 0{,}01$?

5. ¿Cómo depende la razón entre la energía potencial eléctrica U_E y la energía cinética K de una estrella de masa M constituida de un gas ideal de H, del parámetro α empleado para calcular la energía potencial gravitatoria U_g de una distribución esférica de masa? ¿Cómo interpreta el resultado?

6. Encuentre la condición que la densidad numérica de electrones n_e debe satisfacer para que un gas de electrones pueda ser considerado como un gas ideal. *(Versión del ejercicio 3.1 de Prialnik)*

7. Considere una estrella cuya energía interna U viene dada por:

$$U = \int (u_{gas} + u_{rad}) dm$$

   y en la que el factor β mantiene un valor constante en toda la estructura. Demuestre que el teorema del virial puede ser escrito como:

$$E = \frac{\beta\Omega}{2} = -\frac{\beta}{2-\beta} U$$

   (Versión del ejercicio 3.2 de Prialnik)

8. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático y de la ecuación del gas ideal demuestre que si el gas es isotérmico la densidad $\rho(r)$ puede ser escrita como:

$$\rho(r) = \rho_c e^{-\frac{r}{H}}$$

donde ρ_c es la densidad en el centro de la estrella y H es un factor de escala dado por $H = \Re T/\mu g$ con $\Re$ la constante de los gases ideales, T la temperatura el gas, μ la masa atómica promedio y g la aceleración de la gravedad.

9. Encuentre las funciones $m(r)$, $P(r)$, $F(r)$ y $T(r)$ en el entorno del centro de la estrella mediante una expansión en serie de Taylor. *(Versión del ejercicio 5.1 de Prialnik)*