Práctico 7
Modelos simples de estructura estelar: Modelos politrópicos

1. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático y de la ecuación de continuidad de la masa demuestre la ecuación de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

donde $\xi = r/\alpha$, $\theta^n = \rho/\rho_c$ con n el índice politrópico, $\rho_c = \rho(r=0)$, $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{-(n-1)/n}$, G la constante de gravitación universal y K la constante de la ecuación de estado politrópica.

2. Resuelva la ecuación de Lane-Emden para el caso $n = 1$. Calcule la masa M de la estrella y el correspondiente valor de la variable ξ_i. *(Versión del ejercicio 5.2 de Prialnik)*

3. Complete las demostraciones introducidas en clase de las siguientes expresiones generales para un polítropo:

$$M = -\,4\pi\rho_c\alpha^3\xi_1^2\frac{d\theta}{d\xi}\bigg|_{\xi_1}$$

$$\rho_c = \frac{-\bar{\rho}}{\frac{3}{\xi_1}\frac{d\theta}{d\xi}|_{\xi_1}}$$

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} = \frac{1}{4\pi G}[(n+1)K]^n\left(\frac{R}{R_n}\right)^{n-3}$$

$$P_c = \frac{(4\pi G)^{1/n}}{n+1}\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{R}{R_n}\right)^{\frac{3-n}{n}}\rho_c^{1+\frac{1}{n}}$$

4. Para una dada masa M y presión central P_c qué indice politrópico describe a una estrella de mayor tamaño ¿$n = 1{,}5$ o $n = 3$? *(Versión del ejercicio 5.3 de Prialnik)*

5. Estime la masa mínima que puede tener una estrella para fusionar H mediante la cadena protón-protón asumiendo que la temperatura mínima para que este proceso ocurra es $T \sim 3\times10^6 K$ y que la estructura de una estrella de baja masa puede ser modelada como un polítropo.

6. Demuestre que la energía gravitacional de una estrella en equilibrio hidrostático modelada como un polítropo de índice n puede escribirse como:

$$E_g = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}$$

donde R y M son el radio y la masa de la estrella.

7. El caso $n = 0$ en los modelos politrópicos conduce a una indeterminación. ¿Cuál es el significado físico de $n = 0$? ¿Puede existir una estrella politrópica de $n = 0$? ¿Por qué?

8. Vimos en clase que una estrella en equilibrio hidrostático y cuyo interior se rige por una ecuación de estado politrópica de constante K e ínice n posee un perfil de densidad $\rho(r)$ dado por la ecuación:

$$\frac{K}{4\pi G}\frac{(n+1)}{n}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

que requiere las condiciones de contorno:

$$\rho(R) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0$$

Argumente ambas condiciones explicando su significado físico.