

Práctico 1: Las ecuaciones de la evolución estelar

1. (P1-1) Suponga una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

- Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$ y gráfiquela para distintos valores de ρ_c
- Derive una relación entre M y R
- Demuestre que la densidad promedio viene dada por $0,4\rho_c$
- ¿Cuánto vale, según este perfil de densidad, la densidad central del Sol?

(Versión del ejercicio 1.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)

2. (P1-2) Considere una estrella de masa M y radio R .

- Encuentre el valor de la presión central P_c para el caso de una densidad uniforme $\rho = \rho_c$ y verifique que se cumple la inecuación $P_c \geq GM^2/8\pi R^4$ con G la constante de gravitación universal.
- Verifique que la inecuación anterior se cumple también para el caso en que la densidad $\rho(r)$ viene dada por:

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

3. ¿Qué se concluye de las respuestas a las dos preguntas anteriores?

(Versión del ejercicio 2.1 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)

4. (P1-3) Suponga que una estrella de masa M alcanza su máxima densidad ρ_c en su centro donde su presión vale P_c . Muestre que P_c y ρ_c están relacionadas por:

$$P_c < (4\pi)^{1/3} 0,347 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

(Versión del ejercicio 2.2 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)

5. (P1-4) Para una estrella de masa M y radio R encuentre el valor del coeficiente α de la expresión para la energía potencial gravitatoria $\Omega = -\alpha GM^2/R$ con M y R la masa y radio de la estrella respectivamente, que viene determinado por el perfil de densidad $\rho = \rho(r)$, con r la distancia desde el centro de la estrella, para los siguientes casos: *(Versión del ejercicio 2.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)*

- Para un perfil de densidad uniforme $\rho(r) = \rho_c$
- Para un perfil de densidad dado por:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

6. (P1-5) Considere una estrella de masa M cuya única fuente de energía es el colapso gravitatorio. Encuentre una expresión para la tasa de disminución de su radio asumiendo que durante el proceso de colapso su luminosidad permanece constante (*Versión del ejercicio 2.4 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik*).

7. (P1-6) A partir de la ecuación de continuidad $dm = 4\pi\rho(r)r^2dr$ y considerando que la densidad $\rho(r)$ viene dada por:

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

donde ρ_c es la densidad en el centro de la estrella de radio R :

- (a) Demuestre que la masa contenida entre el centro y un radio interno r viene dada, en términos de la variable $x = r/R$, por:

$$m(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c \left(x^3 - \frac{3}{4}x^4\right)$$

- (b) Demuestre que la masa total de la estrella M viene dada por:

$$M = \frac{\pi}{3}R^3 \rho_c$$

- (c) Empleando la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que la presión P como función de la coordenada radial adimensional x puede ser expresada como:

$$P = \frac{5}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \left(1 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{28}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^4\right)$$

- (d) ¿Cuál es la presión central resultante?

- (e) ¿Cómo se compara la presión central con la cota mínima que se obtiene integrando $dP/dm = -Gm/4\pi r^4$ y asumiendo $r = R$?

8. (P1-7) Para una estrella cuya densidad varía linealmente con la distancia r según $\rho = \rho_c(1-r/R)$ calcular la temperatura a la distancia $r = R/2$ en función de la temperatura central T_c , asumiendo que su composición química no varía con r . (*Versión del ejercicio 4 del práctico 5 de Julio Fernández*)

9. (P1-8) Suponga una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

con $n = 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty$

- (a) Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$ y gráfiquela para un dado valor de ρ_c y distintos valores de n
- (b) Derive una relación entre M y R
- (c) Encuentre una expresión para la densidad promedio como función de n y de ρ_c
- (d) Encuentre una expresión para la presión central P_c
- (e) ¿Cuánto vale la densidad central como función de la densidad promedio para distintos valores de n ?