Práctico 4: Modelos politrópicos

1. (P4-1) Resuelva la ecuación de Lane-Emden para el caso $n = 1$ y calcule el valor de la variable ξ_i y de la masa de la estrella. *(Versión del ejercicio 5.2 de Prialnik)*

2. (P4-2) Para una dada masa M y presión central P_c qué indice politrópico describe a una estrella de mayor tamaño ¿$n = 1{,}5$ o $n = 3$? *(Versión del ejercicio 5.3 de Prialnik)*

3. (P4-3) Calcule la masa mínima que puede tener una estrella para fusionar H mediante la cadena protón-protón asumiendo que la temperatura mínima para que este proceso ocurra es $T \sim 3 \times 10^6 K$ y que la estructura de una estrella de baja masa puede ser modelada como un polítropo.

4. (P4-4) Demuestre que la energía gravitacional de una estrella modelada como un polítropo de índice n puede escribirse como:

$$\Omega = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}$$

   donde R y M son el radio y la masa de la estrella.

5. El caso $n = 0$ en los modelos politrópicos conduce a una indeterminación. ¿Cuál es el significado físico de $n = 0$?

6. Demuestre que una estrella en la cual la fuerza de gravedad está balanceada tanto por la presión gaseosa P_g como por la presión de la radiación P_r se comporta como un polítropo de índice $n = 3$ o $\gamma = 4/3$. *(Versión del ejercicio 2 del práctico 5 de Julio Fernández)*

7. Demuestre que una estrella en equilibrio hidrostático y cuyo interior se rige por una ecuación de estado politrópica de constante K e ínice n posee un perfil de densidad $\rho(r)$ que cumple la ecuación:

$$\frac{K}{4\pi G}\frac{(n+1)}{n}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

8. La siguiente ecuación:

$$\frac{K}{4\pi G}\frac{(n+1)}{n}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

   requiere las siguientes dos condiciones de contorno:

$$\rho(R) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0$$

   Argumente ambas condiciones explicando su significado físico.

9. A partir de la ecuación:

$$\frac{K}{4\pi G}\frac{(n+1)}{n}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

demuestre la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

con n el índice politrópico, $\xi = r/\alpha$ y $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{-(n-1)/n}$ con ρ_c la densidad central y K la constante de la ecuación de estado politrópica.

10. Demuestre que en una estrella politrópica en equilibrio hidrostático el radio R y masa M estan relacionadas por:

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1}\left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{(n+1)^n K^n}{4\pi G}$$

donde

$$M_n = -\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}|_{\xi=\xi_1}$$

y

$$R_n = -\xi_1$$