Práctico 1: Las ecuaciones de la evolución estelar

1. (P1-1) Suponga una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

   (a) Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$

   (b) Derive una relación entre M y R

   (c) Demuestre que la densidad promedio viene dada por $0{,}4\rho_c$

   (Versión del ejercicio 1.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)

2. (P1-2) Considere una estrella de masa M y radio R.*(Versión del ejercicio 2.1 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)*

   (a) Encuentre el valor de la presión central P_c

   (b) Verifique que se cumple la inecuación $P_c > GM^2/8\pi R^4$ con G la constante de gravitación universal para el caso de una densidad uniforme $\rho = \rho_c$.

   (c) Verifique la inecuación anterior para el caso en que la densidad ρ viene dada por:

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

3. (P1-3) Suponga que una estrella de masa M alcanza su máxima densidad ρ_c en su centro donde su presión vale P_c. Muestre que P_c y ρ_c están relacionadas por *(Versión del ejercicio 2.2 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)*

$$P_c = (4\pi)^{1/3} 0{,}347\, GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

4. (P1-4) Para una estrella de masa M y radio R encuentre el valor del coeficiente α que viene determinado por el perfil de densidad $\rho = \rho(r)$, con r la distancia

desde el centro de la estrella, para los siguientes casos: *(Versión del ejercicio 2.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik)*

(a) Para un perfil de densidad uniforme $\rho(r) = \rho_c$

(b) Para un perfil de densidad dado por:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

5. (P1-5) Considere una estrella de masa M cuya única fuente de energía es el colapso gravitatorio. Encuentre una expresión para la tasa de disminución de su radio asumiendo que durante el proceso de colapso su luminosidad permanece constante *(Versión del ejercicio 2.4 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik).*

6. (P1-6) A partir de la ecuación de continuidad $dm = 4\pi\rho r^2 dr$ y considerando que la densidad ρ como funcón de la coordenada radial r viene dada por:

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

donde ρ_c es la densidad en el centro de la estrella de radio R:

(a) Demuestre que la masa contenida entre el centro y un radio interno r viene dada, en términos de la variable $x = r/R$, por:

$$m(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c (x^3 - \frac{3}{4}x^4)$$

(b) Demuestre que la masa total de la estrella M viene dada por:

$$M = \frac{\pi}{3} R^3 \rho_c$$

(c) Empleando la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que la presión P como función de la coordenada radial adimensional x puede ser expresada como:

$$P = \frac{5}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4}\left(1 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{28}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^4\right)$$

(d) ¿Cuál es la presión central resultante?

(e) ¿Cómo se compara la presión central con la cota mínima que se obtiene integrando $dP/dm = -Gm/4\pi r^4$ y asumiendo $r = R$?