

Parcial 1 de Astrofísica estelar
12 de setiembre de 2022

1. Suponga una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella, desde un valor máximo ρ_c en su centro y hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

- (a) Encuentre una expresión para $m(r)$ (**3 puntos**)
 (b) Demuestre que la densidad promedio $\bar{\rho}$ viene dada por $0,4\rho_c$ (**3 puntos**)
 (c) Verifique que la presión central P_c cumple con las siguientes inecuaciones (**9 puntos**)

$$GM^2/8\pi R^4 \leq P_c < (4\pi)^{1/3} 0,347 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

2. Considere una estrella de masa M cuya energía total E viene dada por $E = \Omega + U$ con Ω la energía potencial gravitatoria y U la energía interna dada por:

$$U = \int_0^M (u_{gas} + u_{rad}) dm$$

con u_{gas} y u_{rad} las energías por unidad de masa del gas y de la radiación, respectivamente. Si el factor $\beta = P_{gas}/P_{total}$ con $P_{total} = P_{gas} + P_{rad}$ mantiene un valor constante en toda la estructura de la estrella:

- (a) Demuestre que el teorema del virial puede ser escrito como (**6 puntos**):

$$E = \frac{\beta\Omega}{2} = -\frac{\beta}{2-\beta}U$$

- (b) ¿Cómo varía la razón entre Ω y U como función de la masa estelar M ? (**4 puntos**)

3. La ecuación de la energía interna de una estrella en simetría esférica viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = q - \frac{\partial F}{\partial m}$$

donde u es la energía interna por unidad de masa, t es el tiempo, P es la presión, ρ es la densidad de masa, q es la energía generada por unidad de masa y de tiempo, F es la potencia y m es la masa encerrada en una esfera de radio r centrada en la estrella.

Vimos en clase que no todos los términos de la ecuación pueden ser positivos, nulos o negativos. Cada término tiene ciertos signos posibles y existe un total de 13 combinaciones posibles de signos. Por ejemplo, la siguiente tabla muestra una de las combinaciones posibles de signos para la cual $P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0$, $q = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial m} > 0$, lo que produce que $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ y que $\frac{dR}{dt} = 0$. Esto puede ser interpretado como que en equilibrio hidrostático y en ausencia de una fuente de energía interna, la estrella pierde energía interna si mantiene su radio R constante.

- (a) Complete las columnas grises incluyendo las combinaciones posibles de signos (**10 puntos**)
 (b) Complete la columna dR/dt incluyendo el correspondiente comportamiento del radio R (**5 puntos**)
 (c) Complete la columna con la interpretación física correspondiente (**5 puntos**)
 (d) ¿Espera que alguna combinación de signos no describa a una estrella? ¿Por qué? (**5 puntos**)

Comb.	$P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right)$	q	$\frac{\partial F}{\partial m}$	$\frac{\partial u}{\partial m}$	$\frac{dR}{dt}$	Interpretación física
1	= 0	= 0	> 0	< 0	0	En equilibrio hidrostático y sin una fuente de energía, la estrella pierde energía interna si su radio es constante
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						