

Práctico 1

Ecuaciones de continuidad de la masa y equilibrio hidrostático. Perfil de densidad y energía potencial gravitatoria.

1. Cálculos para el perfil de densidad $\rho(r)$ uniforme.

- (a) Demuestre que para una estrella de masa M y radio R en equilibrio hidrostático, el valor de la presión central P_c para el caso de una densidad uniforme $\rho = \rho_c$ cumple la inecuación:

$$P_c > \frac{1}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

- (b) Suponga que la estrella alcanza su máxima densidad ρ_c en su centro, donde la presión vale P_c . Demuestre que P_c y ρ_c están relacionadas por¹:

$$P_c < (4\pi)^{1/3} 0,347 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

2. Cálculos para el perfil de densidad $\overline{\rho(r)} = 3m/4\pi r^3$

- (a) Demuestre que en este caso la cota inferior de la presión central P_c viene dada por:

$$P_c > \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

- (b) ¿Cuál es la diferencia entre este perfil y $\rho(r) = \bar{\rho}$?

3. Cálculos para el perfil de densidad $\rho(r) \propto 1 - (r/R)^2$.

Considere una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función²:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

- (a) Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$ y grafíquela para distintos valores de ρ_c
 (b) Derive una relación entre M y R
 (c) Demuestre que la densidad promedio viene dada por $0,4\rho_c$
 (d) ¿Cuánto vale, según este perfil de densidad, la densidad central del Sol?
 (e) Verifique que se cumple la inecuación:

$$P_c > \frac{1}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

4. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que en una estrella hipotética constituida por un gas incompresible y en reposo, la presión P cerca de la superficie aumenta linealmente con la profundidad respecto de la superficie.

5. Asuma que el Sol está constituido por un gas ideal que se encuentra en equilibrio hidrostático y que su densidad central ρ_c se relaciona con su densidad promedio $\bar{\rho}$ según $\rho_c = \bar{\rho}/0,4$. Estime una cota mínima para su temperatura central T_c .

¹Versión del ejercicio 2.2 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik

²Versión del ejercicio 1.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik

6. Encuentre una expresión para la energía potencial gravitatoria U_g de una distribución esférica de masa M y radio R con un perfil de densidad de masa $\rho(r)$ arbitrario. A partir de esa expresión demuestre que en el caso de un perfil uniforme $\rho(r) = \bar{\rho}$ la energía potencial gravitatoria U_g viene dada por:

$$U_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

7. Para una estrella de masa M y radio R encuentre el valor del coeficiente α de la expresión para la energía potencial gravitatoria $E_g = -\alpha GM^2/R$ para un perfil de densidad dado por:³:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

³Versión del ejercicio 2.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik