Práctico 7
Modelos simples de estructura estelar: Modelos politrópicos

1. Vimos en clase que una estrella en equilibrio hidrostático y cuyo interior se rige por una ecuación de estado politrópica de constante K e ínice n posee un perfil de densidad $\rho(r)$ dado por la ecuación:

$$\frac{K(n+1)}{n4\pi G}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución será la función $\rho = \rho(r)$ y requiere las siguientes dos condiciones de contorno: $\rho(R) = 0$ y $\frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0$. Argumente e interprete ambas condiciones. ¿Cuál es el conjunto de parámetros que define a un polítropo?

2. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático y de la ecuación de continuidad demuestre la ecuación de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

donde $\xi = r/\alpha$, $\theta^n = \rho/\rho_c$ con n el índice politrópico, $\rho_c = \rho(r=0)$, $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{-(n-1)/n}$, G la constante de gravitación universal y K la constante de la ecuación de estado politrópica.

3. Calcule la solución de la ecuación de Lan-Emden para el caso $n = 0$

4. El caso $n = 0$ en los modelos politrópicos conduce a una indeterminación. ¿Cuál es el significado físico de $n = 0$? ¿Puede existir una estrella politrópica de $n = 0$? ¿Por qué?

5. Resuelva la ecuación de Lane-Emden para el caso $n = 1$. Calcule la masa M de la estrella y el correspondiente valor de la variable ξ_1. *(Versión del ejercicio 5.2 de Prialnik)*

6. Para una dada masa M y presión central P_c qué indice politrópico describe a una estrella de mayor tamaño ¿$n = 1{,}5$ o $n = 3$? *(Versión del ejercicio 5.3 de Prialnik)*

7. Estime la masa mínima que puede tener una estrella para fusionar H mediante la cadena protón-protón asumiendo que la temperatura mínima para que este proceso ocurra es $T \sim 3 \times 10^6 K$ y que la estructura de una estrella de baja masa puede ser modelada como un polítropo.

8. Demuestre que la energía gravitacional de una estrella de radio R y masa M en equilibrio hidrostático y modelada como un polítropo de índice n puede escribirse como:

$$E_g = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}$$

9. Demuestre que en el caso de una estrella politrópica existe una relación entre la densidad promedio $\bar{\rho}$ y la densidad central ρ_c dada por:

$$D_n \equiv \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = -\left[\frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)_{\xi_1}\right]^{-1}$$

10. Demuestre que la densidad central ρ_c y la presión central P_c se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$P_c = \frac{(4\pi G)^{1/n}}{n+1} \left(\frac{GM}{M_n}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{\frac{3-n}{n}} \rho_c^{1+\frac{1}{n}}$$

11. Demuestre que la masa de una estrella politrópica viene dada por:

$$M = -\,4\pi \rho_c \alpha^3 \xi_1^2 \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi_1}$$

donde $\xi = r/\alpha$, $\theta^n = \rho/\rho_c$ con n el índice politrópico, $\rho_c = \rho(r=0)$ y $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{-(n-1)/n}$

12. Demuestre que la masa M y el radio R de una estrella modelada como un polítropo de índice n se relacionan mediante:

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G}$$