1

Conjunto de dispersores

lugares fijos, pequeños: $\vec r_j$

La σ es la suma coherente (de las amplitudes) de estos dispersores.

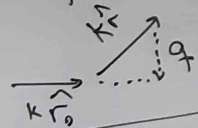
1) mom. dip $\propto$ campos (incidentes) en la ubicación $\vec r_j$

factor fase $e^{ik\vec r_0\cdot\vec r_j}$

2) campos generados $\dfrac{e^{ik|\vec r-\vec r_j|}}{|\vec r-\vec r_j|} \sim \dfrac{e^{ikr}}{r}\, e^{-ik\hat r\cdot\vec r_j}$; $\to r-\hat r\cdot\vec r_j$

$\Rightarrow$ factor fase $e^{ik(\hat r_0-\hat r)\cdot\vec r_j}$

$$\boxed{\vec q = k\hat r_0 - k\hat r}$$



$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0|E_0|)^2}\left|\sum_j\left(\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec p_j + \hat r\times\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec m_j/c\right)e^{i\vec q\cdot\vec r_j}\right|^2}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ depende distr. dispersores ($\vec r_j$!), excepto si $\vec q = 0$ (dirección hacia adelante)

Si los disp. son idénticos: $\vec p_j \to \vec p$, $\vec m_j \to \vec m$

2

$\Rightarrow$ factor de forma $\boxed{\mathcal F(\vec q) = \left|\sum_j e^{i\vec q\cdot\vec r_j}\right|^2}$

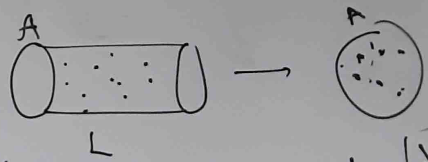
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0|E_0|)^2}\left|\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec p + \hat r\times\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec m/c\right|^2\mathcal F(\vec q)}$$

$$\mathcal F(\vec q) = \left|\sum_j e^{i\vec q\cdot\vec r_j}\right|^2 = \sum_{jj'} e^{i\vec q\cdot(\vec r_j-\vec r_{j'})}$$

Se desp. implícitamente la disp. múltiple: camino libre medio $\gg$ tamaño red.

n: nro/unidad volumen

$\lambda = \dfrac{1}{n\sigma_1}$



$6\sigma_1$

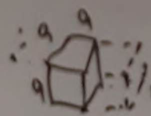
$$\cancel{A} = \underbrace{L\cancel{A}n}_{\text{nro. disp}}\ \underbrace{\sigma_1}_{\text{secc. ef.}} \Rightarrow L = \boxed{\lambda = \frac{1}{n\sigma_1}}$$

— Dispersores en $\vec r_j$ aleatorios, se puede dems. que $j\neq j'$ de contribución nula a $\mathcal F(\vec q)$, queda $j=j' \Rightarrow \boxed{\mathcal F(\vec q) = N}$ ($j, j' = 1,\dots,N$) cantidad de dispersores

Suma incoherente de dispersores: N

— Dispersores $\vec r_j$, red, se puede ver que $\mathcal F\neq 0$ únicamente en dirección hacia adelante, para redes grandes ($N\gg 1$). Impurezas y vibraciones red producen $\mathcal F\neq 0$ en otras direcciones.

Ej. red cúbica: $N_1, N_2, N_3, \underline{a}$ ...



$N = N_1 N_2 N_3$

$$\boxed{F(\vec q) = N^2 \frac{\text{sen}^2\frac{N_1 q_1 a}{2}\;\text{sen}^2\frac{N_2 q_2 a}{2}\;\text{sen}^2\frac{N_3 q_3 a}{2}}{N_1^2\,\text{sen}^2\frac{q_1 a}{2}\;N_2^2\,\text{sen}^2\frac{q_2 a}{2}\;N_3^2\,\text{sen}^2\frac{q_3 a}{2}}}$$

$\vec q = k(\hat r_0 - \hat r)$

$\hat K$ "grande": $ka > \pi$ long. onda pequeñas ($\lambda < a$)

picos: $q_i a = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ (ley Bragg)

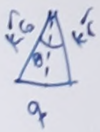
$\hat K$ "pequeño": $ka \ll \pi$ grandes long. onda ($\lambda \gg a$)

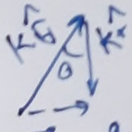
picos $q_i a = 0$ $\quad (q_i a)_{max} = 2ka \ll \pi$

$$F(\vec q) \propto \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{\text{sen}\, x_i}{x_i}\right)^2, \quad x_i = \frac{N_i q_i a}{2}.$$

$\frac{N_i q_i a}{2} < \pi$, toma valores "no pequeños"

$L \sim N_i a$ tamaño de la red





$\vec q$, $q = 2k\,\text{sen}\,\theta/2 = 2\frac{2\pi}{\lambda}\,\text{sen}\frac{\theta}{2} < \frac{2\pi}{N_i a \sim L}$

$\sim \frac{\theta}{\lambda} < \frac{1}{L}$ $\quad \boxed{\theta < \lambda/L}$

Dispersión ondas/energía como teoría de perturbaciones

ϵ_0, μ_0 (vacío, medio uniforme) Indep. de w {ó w dado}

Cambio de ϵ_1, μ_1 → produce dispersión.

$$\vec D \neq \epsilon_0 \vec E, \quad \vec B \neq \mu_0 \vec H$$

Pert. $\vec D - \epsilon_0 \vec E$, $\vec B - \mu_0 \vec H$, "pequeños" en una región acotada del espacio.

$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$$

$$\vec\nabla\cdot\vec D = 0 \qquad \nabla\times\vec H = \frac{\partial \vec D}{\partial t}$$

Ec. ondas con "pequeñas" fuentes $\vec D$

$$\nabla\times(\nabla\times D) = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot D}_{0}) - \nabla^2 D = -\nabla^2 D$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H)$$

$$\nabla\times(\nabla\times(\epsilon_0 E)) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B)$$

$$\nabla^2 D - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\nabla\times(\nabla\times D) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H) + \left[\nabla\times(\nabla\times\epsilon_0 E) + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times B\right]$$

sin aproximaciones!!!

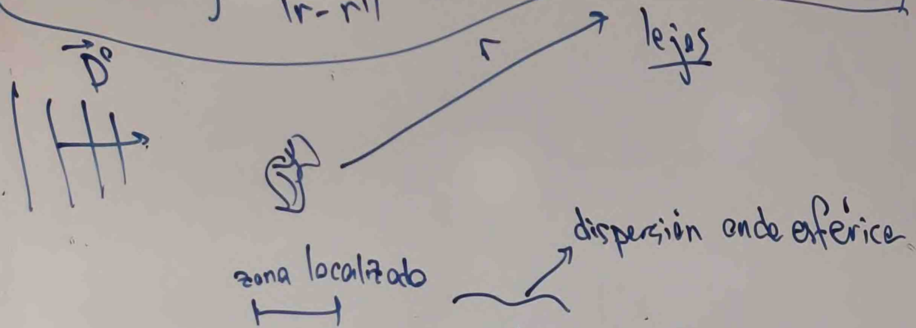
$$\nabla^2 D - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\nabla\times(\nabla\times(\underbrace{\vec D - \epsilon_0 \vec E})) + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times(\underbrace{\vec B - \mu_0 \vec H})$$

Asumimos dependencia armónica, frec. w, e^{-iwt}: $\frac{\partial}{\partial t} \to -iw$ ec. Helmholtz

$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 w^2$ $\quad \boxed{(\nabla^2 + k^2) D = -\nabla\times(\nabla\times(\vec D - \epsilon_0\vec E)) - iw\epsilon_0 \nabla\times(\vec B - \mu_0 \vec H)}$

$\vec D^{(0)}(\vec r)$: solución de la ec. homogénea

$$\boxed{\vec D = \vec D^{(0)} + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|}\left\{\nabla'\times(\nabla'\times(\vec D'-\epsilon_0\vec E')) + i\epsilon_0\omega\,\nabla'\times(\vec B'-\mu_0\vec H')\right\}}$$



$$\vec D^0 \longrightarrow \vec D^0 + \vec A_d\,\frac{e^{ikr}}{r} \quad ; \ \vec A_d\text{: amplitud dispersión}$$

$$\boxed{\vec A_d = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, e^{-ik\hat r\cdot\vec r'}\left\{\nabla'\times(\nabla'\times(D-\epsilon_0 E)) + i\epsilon\omega\,\nabla'\times(B-\mu_0 H)\right\}}$$

integrando "por partes": $\nabla\times(f\vec C) = \vec\nabla f\times\vec C + f\,\underbrace{\vec\nabla\times\vec C}_{D-\epsilon_0 E}$

$$\int_{esp} d^3r\,\nabla\times(f\vec C) = \oint_S f\vec C\cdot d\vec A = 0, \quad C = B-\mu_0 H$$

$\to$ cero lejos!!!

$$\vec\nabla' e^{-ik\hat r\cdot\vec r'} = -ik\,e^{-ik\hat r\cdot\vec r'}\,\hat r, \quad \nabla' \to -ik\hat r$$

$$\boxed{\vec A_d = \frac{k^2}{4\pi}\int d^3r' \, e^{-ik\hat r\cdot\vec r'}\left\{\underbrace{\hat r\times((D-\epsilon_0 E)\times\hat r)}_{DE!!} - \underbrace{\frac{\epsilon_0\omega}{k}\,\hat r\times(B-\mu_0 H)}_{DM!!}\right\}}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat r,\vec\epsilon) = \frac{|\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec A_d|^2}{|\vec D^0|^2}}$$

$\vec A_d$ desconocido en tanto los campos lo son.

Solución iterativa: en $\vec D = \vec D^0 + \dots$

ponemos $\vec D = \vec D^0$

y obtenemos $\vec D^{(1)} \Rightarrow \vec D^{(2)} \dots$

serie (convergencia?!) en $\left\{\begin{array}{l}\vec D-\epsilon_0\vec E\\ \vec B-\mu_0\vec H\end{array}\right.$

1ª iteración: aproximación de Born!

$$\vec D(\vec r) = (\epsilon + \delta\epsilon(\vec r))\,\vec E(\vec r), \quad \delta\epsilon \ll \epsilon$$

$$\vec B(\vec r) = (\mu + \delta\mu(\vec r))\,\vec H(\vec r)$$

$$D - \epsilon\vec E = \delta\epsilon(\vec r)\,\vec E(\vec r)$$

$$B - \mu\vec H = \delta\mu(\vec r)\,\vec H(\vec r)$$

$$\begin{cases} \vec D - \epsilon_0 \vec E = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}\vec D^0 \\ \vec B - \mu_0 \vec H = \frac{\delta\mu}{\mu_0}\vec B^0 \end{cases}$$

$$\vec D^{(0)}(\vec r) = \vec\epsilon\, D_0\, e^{ik\hat r_0\cdot\vec r}$$

Campos no perturbados son ondas planas: $\vec B^{(0)}(\vec r) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,\hat r_0 \times \vec D^{(0)}(\vec r)$

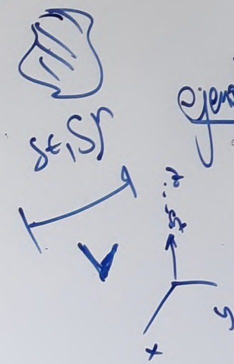
$$\boxed{\frac{\vec\epsilon^{\,*} \cdot \vec A_d^{(1)}}{D^{(0)}} = \frac{k^2}{4\pi}\int d^3r\, e^{i\vec q\cdot\vec r}\left\{\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec\epsilon_0\, \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0} + (\hat r\times\vec\epsilon^{\,*})\cdot(\hat r_0\times\vec\epsilon_0)\,\frac{\delta\mu}{\mu_0}\right\}}$$

$\vec q = k(\hat r_0 - \hat r)$

Grandes λ, bajas frecuencias: $e^{i\vec q\cdot\vec r}\simeq 1$ ($\lambda >>$ zona de dispersión)

reencontramos la expr. de la

$\Rightarrow$ aproximación dipolar



ejemplo esfera diel. a $\begin{cases}\delta\epsilon\neq 0\\ \delta\mu = 0\end{cases}$

$$\int_{esf} d^3r\, e^{i\vec q\cdot\vec r} = \int_0^a dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} e^{iqr\cos\theta}\, r^2\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{q^3}(\operatorname{sen} qa - qa\cos qa)$$

$$\frac{\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec A_d^{(1)}}{D^0} = \frac{k^2}{4\pi}\frac{4\pi}{q^3}(\operatorname{sen} qa - qa\cos qa)\,\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}\,\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec\epsilon_0$$

Grandes λ, bajas frecuencias $qa \to 0$

$$\frac{\operatorname{sen} qa - qa\cos qa}{q^3} \sim a^3/3$$

Bajas frecuencias, y tambien hacia adelante ($q \to 0$)

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Born} = k^4 a^6 \left|\frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_0}\right|^2 |\vec\epsilon^{\,*}\cdot\vec\epsilon_0|^2}$$

Antes: $\left|\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right|^2 \sim \frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_0}$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 + \delta\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}$$

$\Longrightarrow$ OK