TEORIA ELECTROMAGNETICA
2024 – POSTGRADO

1.
Teorema de Helmholtz: un campo vectorial queda determinado por su divergencia y su rotor. Sea $\nabla\cdot\vec{F}=D$ y $\nabla\times\vec{F}=\vec{C}$.

a. Verifique que $\vec{F}=\nabla U+\nabla\times\vec{W}$, donde

$$U(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{D(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' \qquad W(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r'$$

Asuma que $\vec{F}$ es tal que tiende a cero suficientemente rápido a grandes distancias, y use que $\nabla\times(\nabla\times\vec{a})=-\nabla^2\vec{a}+\nabla(\nabla\cdot\vec{a})$. Tenga en cuenta que $\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=-\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$.

b. Dados $D(\vec{r})$ y $\vec{C}(\vec{r})$, discuta si $F(\vec{r})$ es único.

2.
Considere las ecuaciones de Maxwell expresadas a través de los potenciales vector y escalar.

a. Muestre que tanto el gauge de Coulomb como el de Lorenz son admisibles (siempre es posible encontrar una transformación de gauge en la que los nuevos potenciales satisfacen las condiciones del gauge). Encuentre la función que permite transformar los potenciales de un gauge al otro.
b. Verifique si $A_z = 0$ es un gauge admisible.
c. Idem $\varphi = 0$.
d. Discuta si **A** = **0** es un gauge admisible siempre y determine en qué casos lo es.
e. Construya dos gauge admisibles, y dos que no sean admisibles.

3.
En clase se obtuvo la función de Green de la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

y a partir de esta las soluciones de la ecuación de ondas con fuentes.

Ahora, siguiendo un procedimiento similar, calcule la función de Green completa, considerando

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$$

y muestre que la solución es

$$G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Obtenga entonces la solución general:

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \int\int G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')f(\mathbf{x}', t')\, d^3x'\, dt'$$

Esta solución da origen entonces a los potenciales retardados avanzados y retardados.

4.

Considere $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\theta(vt-r)\,\frac{\vec{r}}{r}$: $\vec{B}(\vec{r},t) = 0$ donde θ es la función de Heaviside (función escalón). Muestre que estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell y determine la densidad de carga ρ y corriente **J**. Describa la situación física a la que corresponde. Tenga en cuenta que $\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = \delta(\vec{r})$.

5.

La notación compleja permite calcular promedios temporales en forma fácil. Considere

$$f(\vec{r},t)=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_A) \quad \text{y}$$
$$g(\vec{r},t)=B\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_B)$$

con A y B reales, y la expresión de las mismas funciones en notación compleja,

$$\tilde{f}(\vec{r},t)=\tilde{A}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad , \quad \tilde{A}=|A|e^{i\delta_A}$$

así como la expresión análoga para la otra función g ; muestre que:

$$\langle f\,g\rangle=\frac{1}{2}\Re(\tilde{f}\,\tilde{g}^*)$$

Si para campos periódicos **E** y **B** se usa la notación compleja, escriba entonces < u_{em} >, < **S** > y $d\bar{P}/d\Omega$ (promedio temporal en un ciclo de la densidad de energía, del vector de Poynting y de la distribución de potencia promedio radiada) en función de los CEM en notación compleja.

6.

Considere una onda esférica

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = A\,\sin\frac{\theta}{r}[\cos(kr-wt)-\frac{1}{kr}\sin(kr-wt)]\vec{\phi}$$

con w/k=c y **Φ** el versor correspondiente a la coordenada azimutal.

a. Verifique que este CE verifica las ecuaciones de Maxwell en el vacío y calcule el CM correspondiente.

b. Calcule el vector de Poynting **S**. Calcule el promedio temporal y obtenga el vector intensidad <**S**>. Discuta si este último tiene la dirección que se esperaría, y si decae como r^{-2}.

c. Integre el vector <**S**> para determinar la potencia media total radiada.

7.

Considere los potenciales:

$$V=0,\quad \boldsymbol{A}=\begin{cases}\mu_0\frac{k}{4c}(ct-|x|)^2\,\hat{z}\,, & para\,|x|<ct\\ \vec{0}, & otro\ caso\end{cases}$$

en 3 dimensiones, siendo x la coordenada según el eje **x**.

a. Calcule y grafique los CE y CM.

b. Encuentre las distribuciones de carga y corriente que dan origen a los potenciales.

Tenga en cuenta que las discontinuidades de los campos se deben, por ejemplo, a corrientes de superficie.

8.

Verifique que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell y encuentre los campos, corrientes y carga correspondientes a

a. $V(\vec{r},t)=0,\ \boldsymbol{A}(\vec{r},t)=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.

b. Use la función de gauge $\lambda=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}$ para transformar los potenciales y comente el resultado.

c. Si $V(\vec{r},t)=0,\ \vec{A}(\vec{r},t)=A_0\sin(kx-wt)\hat{y}$, calcule los campos e indique qué relación deben cumplir las constantes k y w para que sean solución de las ecuaciones de Maxwell.

9.

Considere una partícula de carga q en un moviendo circular uniforme con velocidad v en un círculo de radio a.

a. Calcule los multipolos discutidos en clase, y la radiación producida por cada uno de estos en las hipótesis apropiadas.

b. Repita para dos cargas ±q en igual movimiento, que se mueven en puntos opuestos por el centro del círculo.

c. Discuta en estos casos, y más en general, la dependencia del estos multipolos y la radiación producida en función del origen de coordenadas.

d. Muestre que el tensor cuadrupolar tiene únicamente dos cantidades independientes, y si la distribución de cargas tiene un eje de simetría, hay una sola cantidad que lo determina.

10.

Tres cargas están localizadas en el eje z: una carga +2q en el origen (q>0) y dos cargas −q en la coordenada z = ± a cos wt. Determine los momentos multipolares de menor orden, la distribución angular de radiación y la potencia total radiada. Indique para qué condiciones de los parámetros y distancias es válido el cálculo de radiación multipolar.

11.

Un cuadrupolo radiante consiste en un cuadrado de lado a con cargas ±q en esquinas alternadas, que rota a velocidad angular w en un plano alrededor de su centro. Calcule, para grandes longitudes de onda, los campos de radiación, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada al primer orden del desarrollo multipolar. Indique la frecuencia de la radiación, y comente este resultado.

12.

Dos mitades de una cáscara esférica de radio R y conductividad infinita se separan por un pequeño intersticio aislante. Un potencial alternado se aplica a ambos cascarones de forma que los potenciales son ± V coswt. En la aproximación de grandes longitudes de onda encuentre los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia total radiada.

13.

Una superficie aproximadamente esférica dada por $R=R_0(1+\beta P_2(\cos\theta))$ tiene en su interior una densidad uniforme de carga total Q. El parámetro β es pequeño y varía armónicamente con frecuencia w. Esto describe ondas de superficie en la esfera.

a. En la aproximación de grandes longitudes de onda y a menor orden en β calcule los momentos multipolares no nulos, la distribución angular de radiación y la potencia total radiada.

b. Si la densidad uniforme de carga es sustituida por una densidad uniforme de magnetización intrínseca paralela al eje z y con un momento magnético total M, repita los cálculos de la parte anterior.

14.

El principio de correspondencia de establece que, en el límite de grandes números cuánticos, la potencia clásica radiada es igual al producto del cuánto de energía $\hbar\omega$ en la transición, dividido por la vida media de la transición de número cuántico n a (n-1).

a. En el caso no relativista, calcule en el modelo de Bohr para átomos hidrogenoides la probabilidad de transición por unidad de tiempo (inverso de la vida promedio), para una transición de número cuántico principal n a (n-1).

b. Para hidrógeno compare el valor clásico con el valor predicho por la mecánica cuántica para las vidas medias de las transiciones 2p →1s (1.6 x 10 -9 s), 3f → 4d (7.3 x 10 - 8 s) y 6 h → 5g (6.1 x 10 -7 s).

15.

Considere un átomo que emite radiación de longitud de onda 500 nm.

a. Calcule la energía del fotón emitido. Suponga una vida media de 10^{-7} s, valor típico de un átomo en un estado excitado. Estime la potencia emitida en el decaimiento.

b. Compare la potencia anterior con la potencia radiada por el átomo (tamaño típico 1 Å) si se asume que es aplicable la electrodinámica clásica, y que es

b1. dipolar eléctrica,

b2. magnética

b3. cuadrupolar eléctrica

c. ¿Cuál sería el resultado si la longitud de onda fuese 50 nm? Comentarios?

16.

Considere un núcleo de tamaño 7 x 10^{-13} cm que emite un rayo gamma de 1 MeV. Estime la vida media y la tasa de transición Γ para cada una de las siguientes tipos de radiación:

a. Dipolar eléctrica.

b. Dipolar magnética (considere que momento magnético es 2.79 μ_p , siendo esta última magnitud el magnetón de Bohr $e\hbar/2m_p$.

c. Cuadrupolar eléctrica.