PRÁCTICA DE LABORATORIO I-01

MEDICIONES Y ERRORES

Los errores son inevitables.
Lo que cuenta es cómo lidiar con ellos

OBJETIVOS

- Estudiar los conceptos básicos que son inherentes a las mediciones en el laboratorio.
- Aprender las herramientas que se manejan en los métodos estadísticos para determinar los errores en las mediciones directas y los procedimientos utilizados para determinar la propagación de los errores en las mediciones indirectas.

TEORÍA

I. La medición de una cantidad física

Una magnitud física es un atributo de un cuerpo o un fenómeno que sea susceptible de ser medido. El medir una cantidad física es una operación que consiste en establecer la razón numérica entre la cantidad considerada y otra cantidad de la misma especie a la que se llama unidad o patrón de medida; ésta es elegida arbitrariamente por el operador. Las mediciones en el laboratorio pueden ser directas o indirectas. Ejemplos de mediciones directas son: las longitudes con una regla, la masa con una balanza, la temperatura con un termómetro o el tiempo transcurrido entre dos eventos usando un cronómetro.

Muchas cantidades físicas *no* se pueden medir directamente y se hace necesario encontrar su valor en forma indirecta a partir de la medida de otras cantidades que están relacionadas con ella. Por ejemplo, cuando determinamos la densidad de un cuerpo, a partir de la medicion de su masa y de su volumen o la velocidad de un cuerpo a partir de su desplazamiento y el tiempo, luego de operar matemáticamente con estas dos cantidades.

En el proceso de medir una cantidad física intervienen varios factores:

- El método de medición elegido
- Los instrumentos que se utilizan
- El operador que realiza la medición.

En los laboratorios de física, para llevar a cabo las mediciones disponemos de una variedad de instrumentos, desde los más sencillos, como reglas, tornillos micrométricos y balanzas, hasta otros más sofisticados como instrumentos electrónicos que utilizan tecnología digital de precisión.

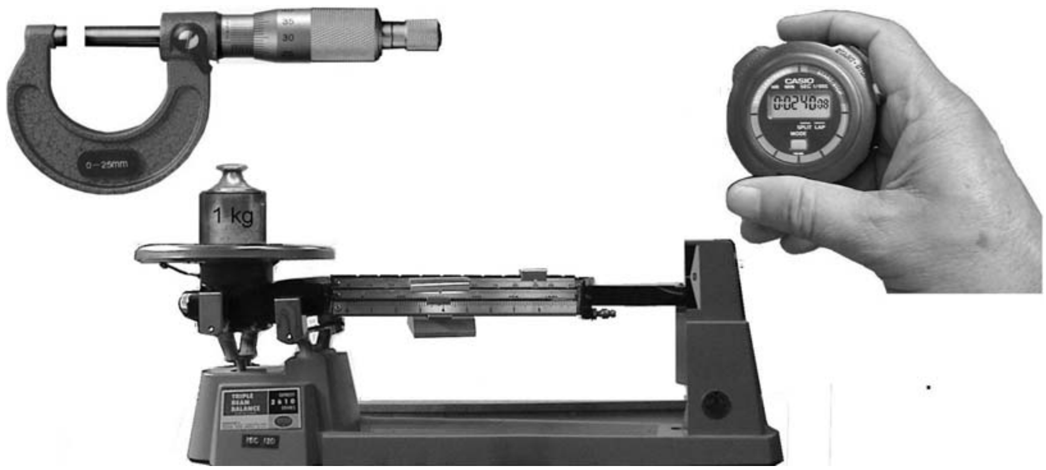


Fig. 1. Instrumentos de medición para: longitud, masa y tiempo

Por ejemplo, en una de las prácticas de este laboratorio vamos a estudiar el movimiento oscilatorio de una pesa suspendida de un resorte, a tal fin Ud. va a utilizar una regla y un cronómetro para hacer las mediciones de longitud y tiempo en forma manual. El estudio también se podría llevar a cabo mediante ciertos instrumentos para la adquisición de datos en forma automática; estos utilizan un sensor de movimiento, que se basa en la emisión y detección de pulsos de ultrasonido hacia un obstáculo, para detectar la *posición de un objeto en tiempo real*, y enviar la data directamente a la computadora para su procesamiento y análisis.

Cuando queremos medir cierta cantidad física, uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta es la elección del instrumento apropiado. El instrumento será más *sensible o preciso* en la medida que sea capaz de apreciar o detectar variaciones cada vez más pequeñas de la cantidad medida. Será más o menos *exacto* si los valores que indica están en mayor o menor correspondencia con el valor verdadero según el patrón correspondiente. Un instrumento puede ser *muy sensible o preciso* y a la vez *poco exacto,* al no estar calibrado correctamente con relación a un patrón conocido.

II. Apreciación de un instrumento y estimación de una lectura

La *apreciación de un instrumento* es la menor medida que el operador puede hacer con el mismo, es decir, el mínimo valor de una división de la escala. Así, una regla graduada cuya menor división es 1 mm, tiene una apreciación de 1 mm. Sin embargo, al hacer uso de esta regla el operador podrá medir y reportar una longitud dando el resultado no en milímetros sino con algunas décimas de milímetros.

Esto nos lleva a definir la *estimación de una lectura* como el menor intervalo que el operador puede reportar con la escala del instrumento que dispone. La estimación es menor que la apreciación del instrumento y depende de la habilidad del operador. Se traduce en añadir una cifra decimal a la lectura.

Ejemplo 1: *Para medir la longitud de un tornillo dos operadores distintos utilizan el mismo instrumento: una regla cuya apreciación es 1 mm, y aplican el mismo procedimiento: hacen coincidir el cero de la escala de la regla con la cara inferior de la cabeza del tornillo para ver donde cae el otro extremo del tornillo sobre la escala* (Fig.2).

El observador *pesimista* encuentra que el extremo del tornillo queda ubicado muy cercano a la marca de 29 mm y reporta que la longitud del tornillo es 29 mm con una incertidumbre de 0,5 mm.

El observador *optimista* es más meticuloso y se da cuenta que el extremo del tornillo queda entre dos divisiones de la escala: 29 mm y 30 mm. El trata de expresar esta situación escogiendo una cifra adicional que no es *leída* sino mas bien *estimada* y como él considera que tiene muy buen ojo, estima como mejor lectura 29,3 mm con una incertidumbre de 0,3 mm.

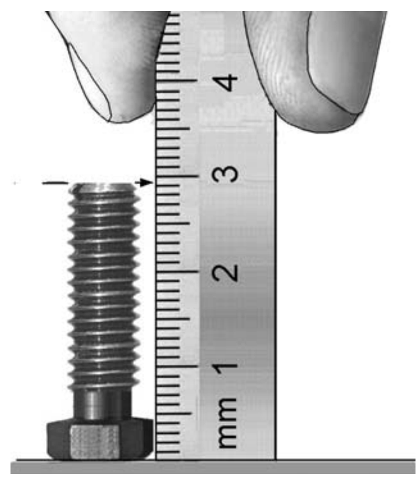


Fig. 2. Estimación de una lectura

Algunos experimentadores prefieren siempre tomar la mitad de la apreciación del instrumento como el valor de la incertidumbre en la lectura. Sin embargo, creemos que esta es una postura demasiado pesimista.

En el caso de instrumentos con escala digital, la incertidumbre de la lectura se puede conseguir en el manual técnico de los mismos. Cuando no se dispone de esta información, como la cifra indicada en la pantalla ha sido redondeada, podemos tomar como incertidumbre, la unidad en la posición de la última cifra.

Por ejemplo, si en la pantalla de un voltímetro digital se despliega 5.86 voltios (Fig. 3); en este caso entendemos que la incertidumbre del voltaje es 0,01 voltio.

Fig. 3: Una escala digital

III. Los errores de medición

Al efectuar la medida, sabemos que existe un valor verdadero de la magnitud física que estamos estudiando pero, a pesar de todos los cuidados que se tomen al seleccionar el instrumento utilizado para realizar las medidas y el esmero con que se realicen, nunca se logrará alcanzar ese valor verdadero y por ello buscaremos la mejor aproximación que podamos alcanzar.

El valor medido de una cantidad física depende tanto de la precisión del instrumento como del método de medición, y también de la experiencia y atención del operador. Es decir, inevitablemente toda medición está afectada por las imperfecciones de los instrumentos, por las condiciones de la medida y también por las limitaciones de nuestros sentidos.

En ciencias e ingeniería, llamamos *error* a la incertidumbre que se tiene en la cantidad medida. Es un indicador del grado de credibilidad del resultado de una medición. Cuando reportamos el valor de la cantidad junto con su correspondiente *error*, quedan bien especificados los límites dentro de los cuales se encuentra el valor verdadero, dado que la medición sólo nos brinda un valor aproximado. Los errores son parte inherente del propio proceso de medición y, generalmente, se suelen clasificar en sistemáticos y casuales.

a) Errores sistemáticos

Son aquellos errores que se repiten constantemente en el transcurso del experimento y afectan a todas las medidas de la misma manera; tienen un mismo signo algebraico, esto es, tienden a dar valores siempre mayores o siempre menores que el valor verdadero. No se pueden minimizar por la vía del cálculo de promedios repitiendo las mediciones varias veces.

Un error sistemático muy común es el llamado *error de paralaje*, por la tendencia del operador a ubicarse mal frente al instrumento, dirigiendo la visual en forma oblicua sobre la escala (Fig. 4).

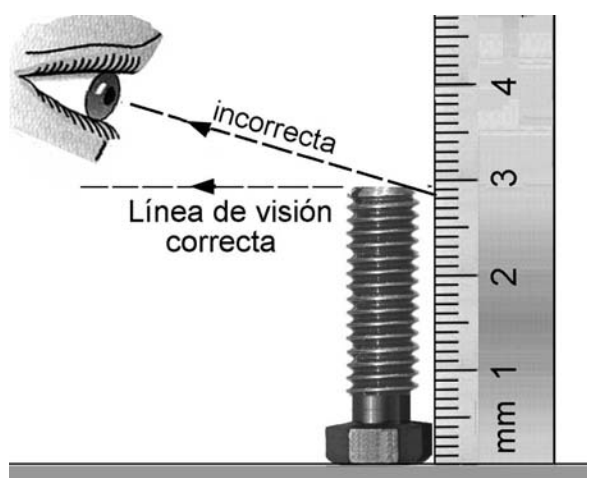


Fig. 4: Un error de paralaje

Los errores de paralaje se cometen con mucha frecuencia en aquellos instrumentos en que una aguja se mueve sobre una escala. La falta de perpendicularidad de la línea de visión con la escala cuando el observador tiene el hábito de mirarla de lado, resulta en un error sistemático (Fig. 5).

En estos casos, se suele colocar un pequeño espejo en el plano de la escala, para que con la ayuda de la imagen de la aguja en el espejo, el operador pueda dirigir la visual en forma perpendicular a la escala.

Fig. 5: Escala con aguja móvil

Otro error sistemático puede ser introducido por una mala calibración del instrumento de medición o también por el *corrimiento del cero* del mismo, el cual *no* fue previamente ajustado correctamente antes de efectuar la lectura. Su valor ficticio se añadirá o restará posteriormente al de la lectura indicada.

Los errores sistemáticos pueden producirse por equipos defectuosos o por factores ambientales, como cuando el operador no se ha dado cuenta que durante el transcurso del experimento ha ocurrido algún cambio de temperatura, presión o humedad que afecta sus mediciones. Muchas veces los errores sistemáticos suelen ser difíciles de detectar para poder ser corregidos y la única manera de darnos cuenta es por comparación con otros métodos alternativos.

b) Errores casuales o aleatorios

Son errores originados por factores accidentales o fortuitos; hacen que las medidas obtenidas sean a veces mayores que el valor verdadero y otras veces menores. Se deben a descuidos casuales del observador y a pequeñas variaciones de las condiciones experimentales que escapan al control del observador. Se caracterizan por el azar de ambos signos algebraicos, son variables en magnitud y oscilan alrededor de un valor medio. Veremos que estos errores pueden ser minimizados aplicando criterios estadísticos por la vía del cálculo de promedios, después de repetir la medición un número suficiente de veces bajo las mismas condiciones.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE UN CONJUNTO DE MEDICIONES

Cuando se mide una cantidad y se repite la operación varias veces de la misma manera, el resultado podría parecer desconcertante porque lo más probable es que las lecturas sean todas diferentes, aunque pudiera haber valores repetidos. Esta diversidad de lecturas son intrínsecas a la naturaleza estadística de la operación de medir, por la influencia que tienen diversos factores aleatorios que son incontrolables. Entonces surge las pregunta: ¿Cuál es el valor que se debe asignar a la cantidad medida? y ¿cuál sería su incerteza? El propósito del tratamiento estadístico de los datos experimentales es justamente determinar el valor más probable de una cantidad medida y estimar su confiabilidad.

IV. El valor medio como el mejor valor de una cantidad medida

Supongamos que una cantidad cuyo valor verdadero es x_v es medida N veces, (utilizando el mismo instrumento y el mismo procedimiento) y encontramos N resultados: x_1, x_2, x_3, ..., x_N. Es posible demostrar (ver referencia 2) que en el límite $N \to \infty$, el valor que más se acerca al *verdadero valor* x_v*, viene dado por el promedio aritmético* de los N valores:

$$\boxed{< x >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} \tag{1}$$

El valor medio $< x >$, puede por lo tanto ser considerado como el mejor valor asequible de la cantidad medida y es el que reportaremos como el *valor observado*. Veamos ahora como podemos determinar cuan confiable es este valor $< x >$.

V. La desviación estándar σ, de cada medición

Supongamos que para un cierto conjunto de medidas x_i $(i = 1,2, ..., N)$, calculamos la *desviación de cada resultado,* x_i, *respecto a la media* $\langle x \rangle$:

$$d_i = x_i - \langle x \rangle \tag{2}$$

Si ahora calculamos el promedio de todas las desviaciones, se tiene:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x \rangle\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) - \langle x \rangle = 0 \tag{3}$$

Es decir, el promedio $\langle d \rangle$ de las desviaciones siempre resulta igual a *cero* y por lo tanto, hemos encontrado que es una cantidad inútil a los efectos de cuantificar la confiabilidad de las medidas x_1, x_2, x_3, ..., x_N.

Veamos ahora que una cantidad más apropiada para cuantificar la dispersión es la *desviación estándar,* σ, la cual se define como la raíz cuadrada de la media de las desviaciones cuadráticas:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x \rangle)^2}} \tag{4}$$

Note que la desviación estándar σ, tiene las mismas unidades físicas que x y siempre será un número positivo. La desviación estándar es una medida apropiada de la incertidumbre debida a fluctuaciones en las observaciones y caracteriza por lo tanto, el error aleatorio que se puede atribuir a cada una de los valores x_i :

$$x_i \pm \sigma \tag{5}$$

Este error σ es común a todas las mediciones pues se calcula haciendo consideraciones estadísticas que toman en cuenta todo el conjunto de observaciones. Es una medida de la dispersión de los datos en torno a su promedio $\langle x \rangle$ y en consecuencia, de la calidad del conjunto de medidas.

Consideremos el conjunto de medidas x_i $(i = 1, 2, ..., N)$ que están distribuidas a lo largo de un rango finito de valores. Podemos dividir este rango en un cierto número de intervalos y contar cuántos valores de x_i hay en cada uno de esos intervalos. Podemos ahora graficar el número de valores que queda en cada intervalo (la frecuencia) en función de la variable x, obteniendo así un *histograma de barras*. La figura 6 muestra el histograma de dos conjuntos de medidas x_i. Se observa que tienen igual valor medio pero presentan distintos grados de dispersión de sus valores.

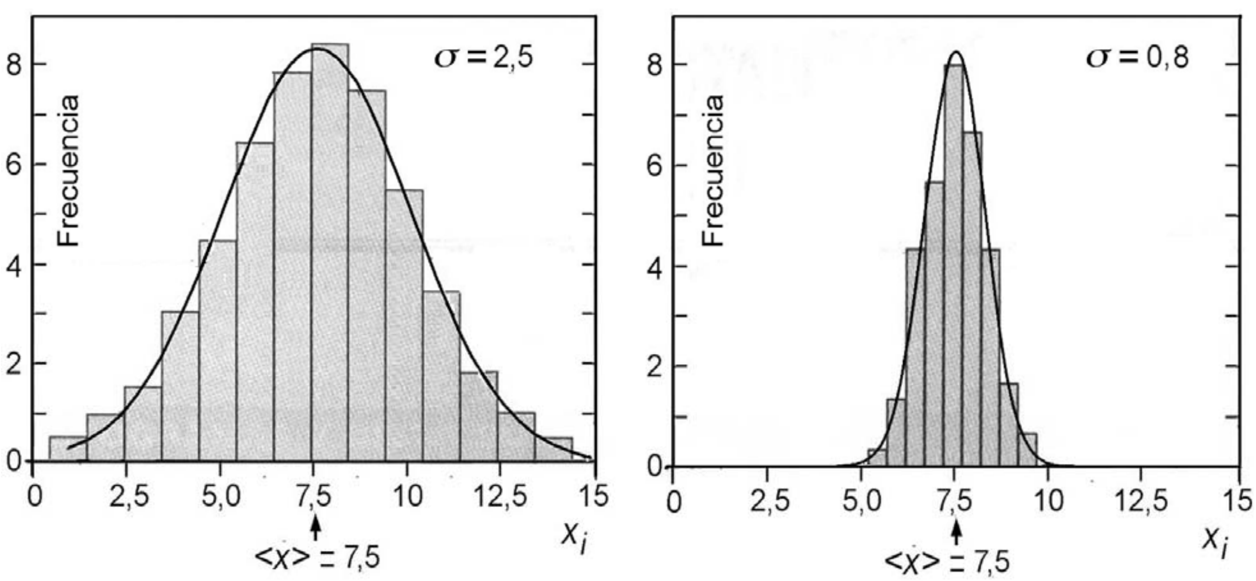


Fig. 6: Histograma de barras.

En cada uno de estos histogramas se ha trazado una curva teórica envolvente que corresponde a una función de probabilidad, *f(x)*, esta es la *distribución de Gauss* o *Normal*, que es la que aparece con más frecuencia en fenómenos naturales y en distintas áreas de la física. En la distribución gaussiana los valores de x se disponen simétricamente alrededor del valor medio en forma de una *campana* y su ancho está determinado por la desviación estándar σ:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp[-\frac{x-<x>}{2\sigma^2}] \qquad (6)$$

Si la campana es ancha, la desviación estándar σ es grande, mientras que si es estrecha, el valor de σ es pequeño. Los puntos de inflexión de la curva están ubicados en ($<x>$ -σ) y ($<x>$ +σ).

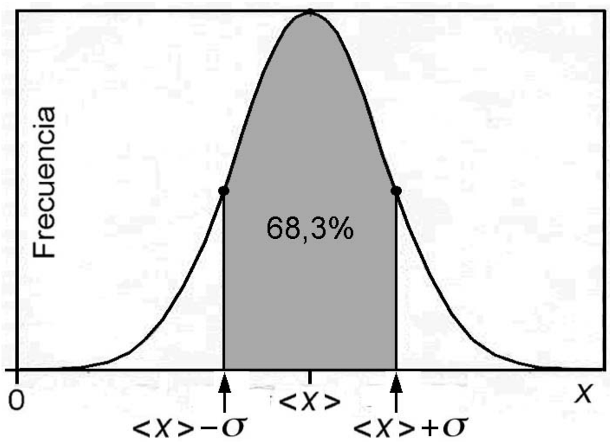


Fig. 7. Campana de Gauss

El área de la curva comprendida entre estos dos puntos constituye el 68,3 % del área total (Fig.7). Esto significa que, considerando sólo los errores aleatorios, podremos estar confiados con un 68,3 % de probabilidad que cualquier medida de x arrojará un valor dentro del intervalo establecido por σ.

<u>Ejemplo 2:</u> *Se efectúan 10 mediciones del período T (s), de las oscilaciones de un oscilador masa-resorte, dando los resultados que se muestran en la siguiente tabla:*

Mediciones	*Valor* x_i *medido*	Desviación (x_i - $<x>$)	Desviación cuadrática $(x_i - <x>)^2$
1	8,50	-0,070	0,0049
2	8,60	+0,03	0,0009
3	8,90	+0,33	0,1089
4	8,20	-0,37	0,1369
5	8,50	-0,07	0,0049
6	8,70	+0,13	0,0169
7	8,50	-0,07	0,0049
8	8,40	-0,17	0,0289
9	8,50	-0,07	0,0049
10	8,90	+0,33	0,1089
	$<x> = \frac{1}{N}\sum x_i = 8{,}57s$	$\sum(x_i - <x>) = 0$	$\sum(x_i - <x>)^2 = 0{,}421s^2$

Con la suma de las desviaciones al cuadrado, calculamos la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum (x_i - <x>)^2} = \sqrt{\frac{0,421\ s^2}{10}} = 0,21\ s$$

Por lo tanto, podemos decir que el *mejor valor* o valor más probable del periodo es $<T>$ = 8,57 s y la dispersión de las lecturas es $\pm 0,21$ s. Esto significa que si, en este mismo oscilador masa-resorte, efectuamos una nueva medición del periodo, la probabilidad de que arroje un valor en el intervalo (8,36 s - 8,78 s) es de 68,3%.

VII. La desviación estándar del valor medio

La desviación estándar σ de un conjunto de *N* medidas individuales da una idea acerca de la dispersión alrededor del valor promedio $<x>$, pero no podemos decir que el intervalo ($-\sigma$, $+\sigma$) sea el intervalo de certeza asociado a la medición.

Supongamos que sobre un mismo sistema realizamos en forma separada, varios conjuntos de *N* mediciones de *x*, y para cada una de estos conjuntos calculamos el correspondiente promedio. Es de esperar que los valores de los promedios de los distintos conjuntos de medidas sean diferentes, pero la dispersión será la misma, puesto que σ no depende de *N* sino de la calidad de las mediciones. Esto significa que los distintos promedios se encontrarán distribuidos con una *dispersión menor* que la que tenían las mediciones individuales. Se puede demostrar (Ver referencia 2) que la distribución de los promedios $<x>$ será gaussiana y tienen una desviación estándar que disminuye en proporción a $\sqrt{N}$ respecto de la desviación estándar de las medidas:

$$\boxed{\sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \quad \text{(Desviación estándar del promedio)} \qquad (7)$$

Con esta expresión tenemos un criterio para determinar los límites dentro de los cuales podemos reportar que se encuentra el valor de una cantidad *x* en el proceso de repetir la medida *N* veces:

$$x = <x> \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad (8)$$

Ejemplo 3: *Determine el valor que debemos reportar para el período de las oscilaciones del oscilador masa-resorte del ejemplo 1.*

Utilizando el resultado obtenido para la desviación estándar de las 10 medidas individuales σ = 0,20 s, podemos calcular la desviación estándar del promedio:

$$\sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0,20}{\sqrt{10}} = 0,06 \text{ s}$$

Por lo tanto, basándonos en las 10 mediciones, podemos reportar que el periodo de las oscilaciones del oscilador masa resorte es:

$$T = (8,56 \pm 0,06) \text{ s}$$

Observe que la expresión para calcular los errores: $\sigma_{<x>} = \sigma / \sqrt{N}$, es un resultado sumamente importante: *Si queremos reducir el error aleatorio a valores despreciables, bastaría con llevar a cabo un número suficiente de medidas.*

Pero ¿valdría la pena el esfuerzo en realizar un número muy grande de medidas para tratar de disminuir $\sigma_{<x>}$? ¿cuál será sería el valor de *N* óptimo o suficiente? Resulta evidente que el límite de *N* estaría impuesto por los errores sistemáticos y los errores de apreciación, que permanecerán inalterables a pesar de los criterios estadísticos, *de modo que nunca podremos llegar mas allá de estos límites*.

Una regla práctica consistiría en tomar unas pocas medidas, hechas de la misma manera y observar la dispersión de las lecturas. Si la desviación resulta pequeña comparada con el error de cada lectura, no habría necesidad de más mediciones y simplemente se toma el *error de lectura* como el *error* del promedio.

VI. Diferencia entre precisión y exactitud

Para un conjunto de medidas x_i (i = 1, 2, ..., N) la confianza o calidad del resultado lo da tanto su *exactitud* como su *precisión*. Una medida será más exacta cuanto más cerca está el valor medio observado del valor verdadero. La *exactitud* está relacionada con los errores sistemáticos. Por otro lado, la *precisión* está ligada a la reproducibilidad de la medida, es decir, a la distribución de los resultados en torno al valor medio y está asociada con los *errores casuales o aleatorios*.

En la figura 8a comparamos dos conjuntos de medidas, A y B, con el mismo valor medio y por lo tanto, tienen la misma exactitud. La distribución A es más aguda alrededor del valor medio y tiene una menor desviación estándar, por lo que se considerará a este conjunto como el *más preciso*. En la figura 8b comparamos dos conjuntos de medidas, C y D, distribuidos idénticamente en torno a sus respectivas medias, por ello tienen *igual precisión*, aunque los valores medios sean distintos. Como el valor medio del conjunto C está más cerca al valor verdadero x_V, resulta *más exacto*.

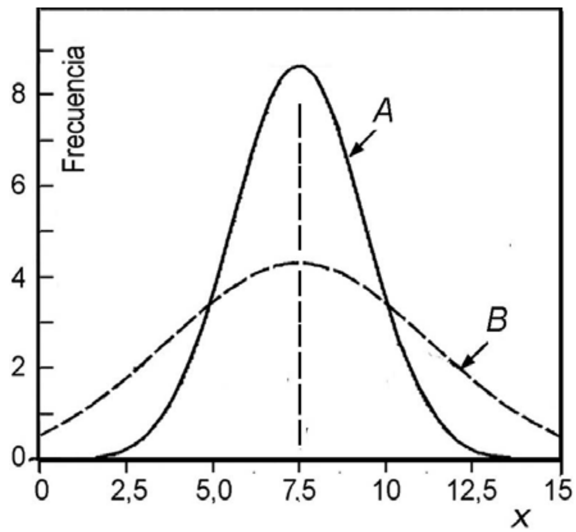


Fig. 8a: Igual exactitud. Diferente precisión

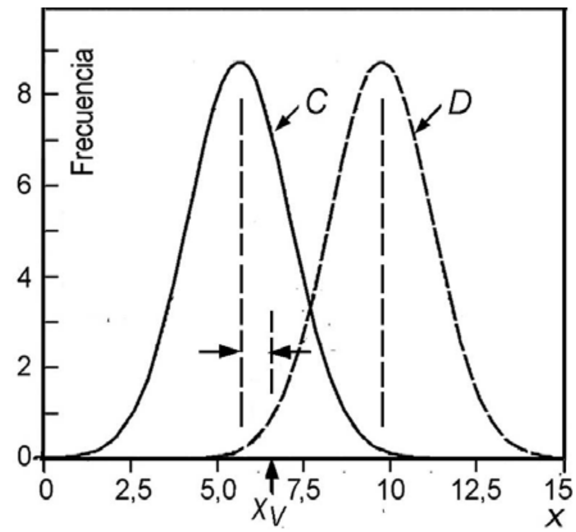


Fig. 8b: Diferente exactitud. Igual precisión

Ejemplo 4: *En la figura 9 se muestran cuatro resultados obtenidos en una práctica de lanzamiento de dardos al blanco. Haciendo una analogía con los procesos de medición queremos ilustrar la distinción entre los conceptos de exactitud y precisión.*

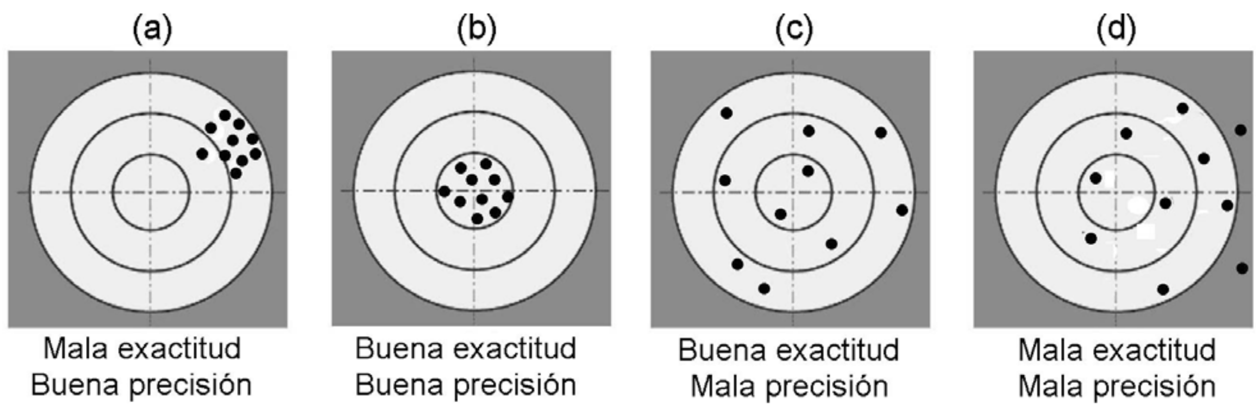


Fig. 9: Ilustración de la diferencia entre exactitud y precisión

La serie de lanzamientos es análoga al conjunto de medidas realizadas y el centro de los anillos se considera como el “valor verdadero”. Aquí los errores casuales estarían asociados a cualquier factor que haga que los dardos lleguen en forma aleatoria a distintos puntos. Mientras que los errores sistemáticos estarían ocasionados porque existe algún sesgo que hace que los dardos impacten en una zona fuera del centro en forma sistemática. Podría ser, por ejemplo, que hay un viento fijo que los estuviese desviando. En los cuatro resultados mostrados, la zona de dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que la ubicación del centroide del conjunto de puntos respecto al centro, da una idea de la exactitud.

VIII. Error relativo y error porcentual

La magnitud de un error tiene una significación o importancia relativa. El error absoluto Δx se considerará pequeño o grande solamente en comparación con el correspondiente valor de la cantidad observada. De allí, la importancia de definir el *error relativo*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \tag{9}$$

El *error porcentual* es el error relativo expresado en forma de porcentajes:

$$\varepsilon\% = \varepsilon \times 100 = \frac{\Delta x}{x} \times 100 \tag{10}$$

Los errores relativos y porcentuales son más significativos que los errores absolutos y se suelen reportar con una sola cifra significativa. Ellos nos dan una idea más realista de las bondad de las medidas que estamos realizando.

IX. Propagación de errores: Medidas indirectas

Cuando nos encontramos con cantidades físicas que no se pueden medir directamente pero que están relacionadas analíticamente con otras que se miden acompañadas de sus respectivos errores, éstos se propagan a la cantidad que queremos calcular de acuerdo a la relación funcional que las vincula. Presentaremos a continuación los dos métodos de mayor uso *para propagar el error* de las cantidades medidas a la cantidad calculada.

a) Método de las derivadas parciales

En base al hecho de que los errores de medida generalmente son pequeños en relación con las cantidades observadas, se puede desarrollar el método de propagación de errores en base al cálculo diferencial.

Sea x la cantidad que queremos calcular a partir de otras cantidades: A_1, A_2, ... , A_N que son el resultado de procesos de medición. Cada una de las cantidades A_i está asociada a su respectivo error ΔA_i , y además se conoce la relación entre los A_i y x:

$$x = x(A_1, A_2, A_3, ..., A_N) \tag{11}$$

La notación indica que x es una función de las variables A_i . El *diferencial total* de la función x se define de la siguiente manera:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial x}{\partial A_2} dA_2 + \frac{\partial x}{\partial A_3} A_3 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial A_N} A_N \tag{12}$$

Acá $\partial x / \partial A_1$ denota la derivada parcial de la función *x* con respecto a la variable A_1 considerando constantes el resto de las variables $A_2, A_3, \ldots, A_N$.

Los diversos diferenciales, dA_i, que aparecen en la expresión para el diferencial total de *x* pueden ser considerados como los distintos errores, ΔA_i, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\boxed{\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial A_1}\right| \Delta A_1 + \left|\frac{\partial x}{\partial A_2}\right| \Delta A_2 + \left|\frac{\partial x}{\partial A_3}\right| \Delta A_3 + \ldots + \left|\frac{\partial x}{\partial A_N}\right| \Delta A_N} \tag{13}$$

Esta es una expresión general para el cálculo del error Δx de la cantidad calculada *x* a partir de los errores $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3, \ldots, \Delta A_N$ de las cantidades que se miden.

Los errores $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_N$ son positivos por convención. Sin embargo, las diversas derivadas parciales involucradas pueden adoptar ambos signos. Esto hace necesario que se tome el valor absoluto de las derivadas parciales; se evita así la compensación (o cancelación) entre los términos involucrados en el miembro derecho de la expresión. Hacer esto equivale a adoptar la posición más pesimista y optamos por calcular el *error máximo*.

Ojo: Este método es aproximado. La manera formal es hacer la suma de la Ec. 13 en cuadratura (cada término al cuadrado) como vimos en clase

Ejemplo 5: Consideremos la energía cinética de una partícula de masa *m* que tiene una velocidad *v*. Calculemos el diferencial total de la función $K = K(m, v)$:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$dK = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} v^2 dm + \frac{1}{2} m d\left(v^2\right) = \frac{1}{2} v^2 dm + m v dv$$

Aplicando el esquema explicado previamente se obtiene el error absoluto ΔK:

$$\Delta K = \left|\frac{1}{2} v^2\right| \Delta m + |mv| \Delta v$$

Asimismo, el error relativo es:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{|\frac{1}{2} v^2| \Delta m + |mv| \Delta v}{\frac{1}{2} m v^2} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \left|\frac{\Delta v}{v}\right|$$

b) Método de las derivadas logarítmicas

Al tratar con funciones que tengan productos y cocientes, el uso de las derivadas logarítmicas brinda el método más práctico para calcular los errores relativos de cantidades determinadas indirectamente.

El método consiste en diferenciar el logaritmo neperiano de la función $x = x(A_1, A_2, A_3, ..., A_N)$:

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

En caso de que proceda, se debe agrupar términos que posean diferenciales dA_i en común, *antes* de escribir los diferenciales dA_i como errores ΔA_i. Siempre queremos determinar el error máximo: por ello es necesario tomar nuevamente el valor absoluto del coeficiente de los distintos errores, ΔA_i.

<u>Ejemplo 6</u>*:* Consideremos de nuevo el caso de la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. La diferenciación del logaritmo neperiano de K da el siguiente resultado:

$$d(\ln K) = d\left[\ln\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right] = d\left(\ln\frac{1}{2} + \ln m + 2\ln v\right) = \frac{dm}{m} + 2\frac{dv}{v} \equiv \frac{dK}{K} \qquad (14)$$

Al reinterpretar como errores los diferenciales en la expresión obtenida, manteniendo las convenciones relativas a la toma de valor absoluto de los coeficientes, se obtiene la expresión del error relativo:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m} + 2\,|\,\frac{\Delta v}{v}\,|$$

Esta expresión coincide con la obtenida por el método de las derivadas parciales y de ella podemos deducir el error absoluto.

X. Manejo de resultados experimentales

a) Cifras significativas y redondeo

Una *cifra significativa* es todo dígito que tenga significado físico. El número de cifras significativas de una cantidad se determina contando desde la izquierda a partir de la primera que es diferente de cero hasta la primera cifra afectada de error inclusive.

Ejemplos de cifras significativas

Número	501	0,501	0,0501	501,0	501,00	$5{,}01 \times 10^6$
Cifras significativas	3	3	3	4	5	3

En este laboratorio, como regla general, *se expresará* el *error absoluto con una sola cifra significativa* lo que conduce a que el resultado solo tenga una cifra incierta.

Cuando queremos expresar el resultado de una medida nos vemos en la necesidad de eliminar dígitos que carecen de sentido físico. La última cifra significativa a retener será aquella que está afectada por el error de dicha medición.

<u>Ejemplo 7</u>: Supongamos que realizamos una serie de medidas del tiempo de caída de un cuerpo desde cierta altura y calculamos el tiempo promedio y la respectiva desviación estándar de los tiempos promedios, con los siguientes resultados:

$$< t > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = 15{,}0\underline{2}7 \text{ s} \qquad\qquad \sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0{,}\ 0\underline{4}2 \text{ s}$$

Supongamos *que el error de lectura del cronómetro puede despreciarse al compararlo con* $\sigma_{<x>}$, entonces se toma como error de la medida: $\Delta t = \sigma_{<x>}$. Para expresar este resultado, de acuerdo a lo convenido para nuestro trabajo, debemos escribir primero el error con una sola cifra significativa: $\Delta t = \pm\, 0{,}04$s. Vemos que el promedio $< t >$ calculado tiene 3 cifras exactas pero la cuarta ya es dudosa porque está afectada por el error, por ello suprimimos la quinta cifra que no tiene sentido físico y el promedio lo *redondeamos* a: $< t > = 15{,}03$. Podemos reportar para el tiempo un valor,

$$t = (15{,}03 \pm 0{,}04) \text{ s}$$

<u>Ejemplo 8</u>: Cuando se usa una calculadora para procesar datos experimentales, una práctica común es retener en la respuesta final del cálculo, todas las cifras que aparecen en la pantalla. Sin embargo, reportar este resultado no tiene sentido físico.

Suponga que se desea calcular el volumen de una esfera cuyo radio se conoce con tres cifras significativas: $r = 2{,}18 \pm 0{,}03$ cm. Empleando una calculadora, se obtiene: $V = (4/3)\pi r^3 = 43{,}39683832$ cm^3.

Lo correcto es retener solamente aquellos dígitos que

se conocen con razonable certeza, los cuales están determinados por el error en el volumen, ΔV.
Aplicando la propagación de errores se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta r}{r} = 3(\frac{0,03}{2,18}) = 0,04128, \qquad \Delta V = 1,704\ cm^3$$

Después de redondear ΔV, a una cifra significativa, reportamos que el valor del volumen es V = (43 ± 2) cm^3.

Criterios de redondeo. Para evitar ambigüedades en el redondeo de un número (por defecto o por exceso), convendremos los siguientes criterios que son los mismos utilizados en las computadoras:

1) Si el primer dígito a suprimir es menor que 5, la última cifra retenida se deja igual.

2) Si la cifra a suprimir es 5 o mayor que 5, entonces se aumenta en una unidad la última cifra retenida.

Número	*5 cifras*	*4 cifras*	*3 cifras*	*2 cifras*	*1 cifra*
3,14159	3,1416	3,142	3,14	3,1	3
851613	85161 $x10^1$	8516 $x10^2$	852 $x10^3$	85 $x10^4$	9 $x10^5$
9,52068$x10^{-3}$	9,5207$x10^{-3}$	9,521$x10^{-3}$	9,52$x10^{-3}$	9,5$x10^{-3}$	1$x10^{-2}$
299792458	2,9979$x10^8$	2,998$x10^8$	3,00$x10^8$	3,0$x10^8$	3$x10^8$

b) Realización de cálculos

Al realizar cálculos podemos señalar algunas reglas a observar:

- En multiplicaciones o divisiones: el resultado final no debe tener más cifras significativas que el número con menos cifras significativas.

Operación	Resultado	Redondeo
2,3 $\times$ 3,14159	7,225657	7,2
2,30 $\times$ 3,14159	7,225657	7,23
23 $\times$ 3,14159	72,25657	72
0,23 $\times$ 3,14159	0,7225657	0,72

36,5 / 3,414	10,69127124	10,7
3,014467 / 0,62	4,862043548	4,9

- En sumas o restas, el resultado no debe tener más cifras significativas después del punto decimal que el sumando con menos cifras significativas después del punto decimal.

Operación	Resultado	Redondeo
322,10 + 3,$\underline{9}$ + 0,307	326,307	326,3
21,$\underline{0}$ + 0,725 + 3,61	25,335	25,3
5$\underline{5}$ + 4,28 + 203,6 +121,470	384,350	384
8,$\underline{2}$ + (3,6x10^{-2}) -1,07	7,166	7,2

- Las constantes (como π) se emplean en los cálculos con tantas cifras significativas *como sean necesarias*.

- Al transformar las unidades se preserva el criterio de que el error se reporta con una cifra significativa. Por ejemplo: Δx = 0,2 s = 0,003 min.

- Las unidades angulares deben transformarse a radianes antes de emplearlas en las propagaciones de errores. Por ejemplo: $\Delta\theta$ = 0,01° = 2 $\times$ 10^{-4} rad.

RESUMEN

El tratamiento estadístico de una data experimental nos permitirá reducir considerablemente los errores casuales de las mediciones. Este análisis sería rigurosamente válido cuando se tiene un conjunto suficientemente grande de mediciones, repetidas bajos las mismas condiciones. En los experimentos que vamos a realizar, por razones prácticas, bajaremos esta condición a un número pequeño de medidas ((N < 10), procurando que éstas sean de buena calidad. Para encontrar el valor de una cantidad x, y prescindiendo de los errores sistemáticos que suponemos han sido corregidos o eliminados, se procede de la siguiente manera:

1) Determine el error de apreciación en el instrumento utilizado.

2) Haga una serie de N mediciones de la misma manera y construya una tabla.

3) Calcule la media aritmética: $<x> = \sum_{i=1}^{N} x_i / N$

4) Calcule la desviación estándar de la media: $\sigma_{<x>} = \sigma / \sqrt{N}$

5) Compare la desviación estándar con el error de apreciación y tome como error de la media, Δx, el mayor de estos dos valores. El error debe tener una sola cifra significativa.
6) Escriba el resultado final de la media sólo con las cifras significativas limitadas por el error: $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ (indicando las unidades apropiadas).

7) Si la cantidad *x* a determinar no se puede medir directamente, sino que se relaciona con las cantidades medidas mediante una relación funcional *x(A, B, C..)*, aplique las técnicas de propagación de errores de las magnitudes que intervienen.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

a) Demuestre la igualdad entre las dos maneras usuales de expresar la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

b) Consulte el manual de su calculadora y estudie el procedimiento para computar la desviación estándar. Esto le será de utilidad en todos los cursos de laboratorio y en su vida profesional.

c) En las siguientes expresiones aplique los dos métodos para evaluar el error Δx sobre la cantidad $x(A,B)$. Tome en cuenta que *A*, ΔA, *B*, ΔB son conocidos.

1) $x = A + 3B$ 2) $x = AB^2$ 3) $x = 5B^3$

d) Escriba el resultado final de los siguientes cálculos, de acuerdo a las reglas enunciadas en el texto:

1) 950,12 + 35,4 + 747,991 2) 1230000 $\times$ 0,000123 / 43,21

ACTIVIDADES A REALIZAR DURANTE LA SESIÓN DE PRÁCTICA

El profesor expondrá los fundamentos teóricos de esta práctica y resolverá algunos ejemplos numéricos de aplicación sobre propagación y cálculo de errores en situaciones específicas. A continuación sugerimos una selección de ejercicios y actividades, algunas de las cuales serán realizados durante la sesión de práctica.

A1. Dadas las expresiones siguientes, $x = x(A, B, C)$, siendo A, B y C variables independientes, calcule el error relativo $\Delta x/x$. Usted podrá escoger entre el método de las derivadas parciales y el de las derivadas logarítmicas. (se suponen conocidos los errores relativos $\Delta A/A$, $\Delta B/B$, $\Delta C/C$.

a) $x = \dfrac{A - B}{(A^2 + B^2)^2}$ b) $x = \left(\dfrac{A-B}{A+B}\right)^3$

c) $x = A^4 + \dfrac{B}{\sqrt{C}}$ d) $x = \ln\left(\dfrac{B}{A}\right)^A$

e) $x = \dfrac{A^3}{4B} + BC$ f) $x = \dfrac{tgA}{senB}$

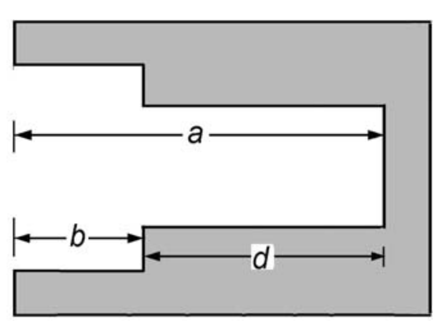
A2. La resistencia de un aislador en función de la temperatura absoluta T, está dada por:

$$R = R_0 e^{E/kT}$$

siendo E la energía de activación y R_0 una constante de proporcionalidad; k es la constante de Boltzmann (k = 8,617x10^{-5} eV/°K). Se desea medir R con 10% de error y se conoce que E = (0,60 $\pm$ 0,01) eV, T = (800 $\pm$ 1) K. Determine el error porcentual correspondiente a R_0.

A3. Una pieza metálica tiene la forma de la figura. Se observa que sólo es posible medir la distancia d indirectamente, como la diferencia entre las longitudes a y b.

Si a = (18,5$\pm$0,1) mm y b = (6,2 $\pm$0,1) mm, ¿Qué valor reportaría Ud. para la distancia d?.



A4. Verificación experimental del número π. A Ud. se le suministra una lata de leche vacía de forma cilíndrica y una regla graduada cuya apreciación es 1 mm. Diseñe un procedimiento para determinar el número π con la mejor precisión posible. Considerando la propagación de errores, estime el error relativo en esta medición.

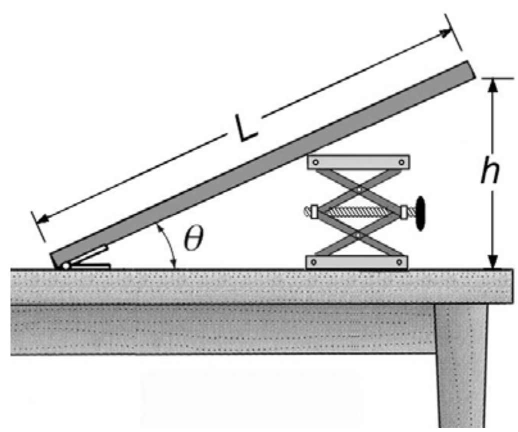
A5. Número *de guisantes en una lata*. Se tiene una lata llena de guisantes y se desea estimar el número de guisantes que hay en ella sin abrirla. La lata tiene forma cilíndrica de diámetro d = (10,6 ± 0,1) cm y altura h = (16,3 ± 0,1) cm. Los guisantes se consideran esféricos de diámetro d = (5,8 ± 0,2) mm.
¿Cuántos guisantes diría Ud. que hay en esa lata? Si Ud. supone que *todo* el volumen de la lata está disponible para los guisantes ¿estarán sus cálculos libres de un error sistemático?

A6. La velocidad del sonido. En una práctica de laboratorio para medir la velocidad del sonido en el aire, se envía un pulso de onda sonora a lo largo de un tubo cerrado en un extremo. La longitud del recorrido del pulso ida y vuelta en el tubo es L = (2,07 ± 0,01) m. En la tabla se muestra el resultado de 8 mediciones del tiempo total registrado de ida y regreso del pulso.

Tiempo (s)	0.00611	0.00620	0.00619	0.00617	0.00615	0.00615	0.00614	0.00623

¿Qué valor reportaría Ud. para la velocidad del sonido?

A7. Error en el ángulo de elevación de un plano inclinado: En una práctica para determinar el coeficiente de fricción estático, se coloca un bloque encima de un plano inclinado, cuya elevación se va gradualmente incrementando hasta que el cuerpo empiece a deslizar. El coeficiente de fricción estático se obtiene a partir del valor del ángulo crítico. Este ángulo se determina midiendo con una regla, la altura h y la longitud L del plano inclinado:

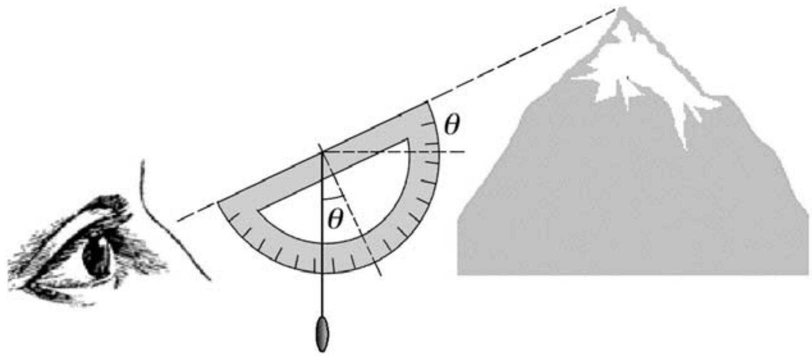


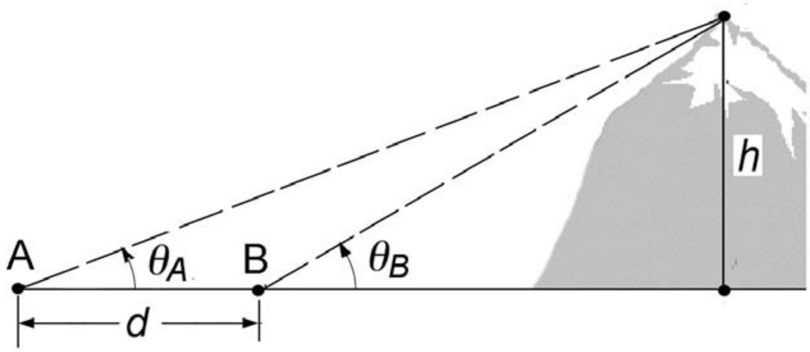
$$\theta = arcsen(h/L)$$

a) Calcule el ángulo θ con su respectivo error para los siguientes valores medidos de las longitudes: $h = (30{,}5 \pm 0{,}1)$ cm y $L = (50{,}0 \pm 0{,}1)$ cm.

b) Calcule el valor del coeficiente de fricción estática con su respectivo error aplicando la expresión: $\mu_e = tg\theta$.

A8. **Midiendo la altura de una montaña:** Un alumno desea determinar la altura del pico de una montaña, usando un transportador y un hilo con una piedra suspendida (plomada). Para ello, se ubica en una posición inicial A, alinea el borde recto del transportador hacia la punta de la montaña y mide el ángulo de elevación inicial, θ_A. Luego, después de caminar en un terreno plano y en línea recta hacia la montaña una distancia *d,* se detiene en la posición B. Allí mide el nuevo ángulo de elevación, θ_B.





a) Verifique la siguiente expresión para la altura *h* de la montaña respecto al suelo:

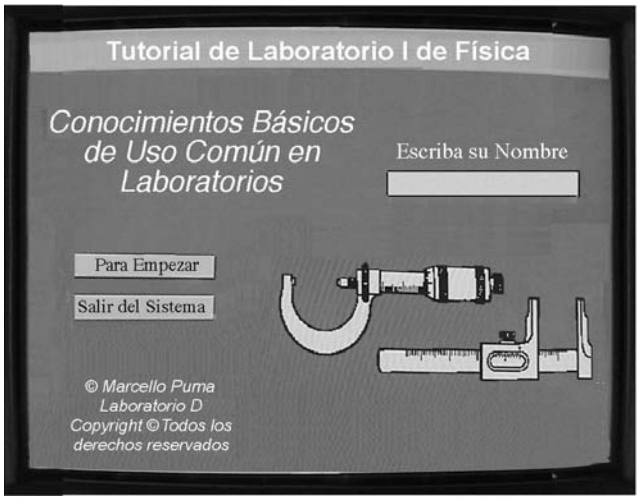
$$h = \left(\frac{tg\,\theta_A tg\,\theta_B}{tg\,\theta_B - tg\,\theta_A}\right)d$$

b) Si las mediciones arrojan los siguientes valores:

$$\theta_A = 15{,}0^\circ \pm 0{,}5^\circ,\ \theta_B = 18{,}5^\circ \pm 0{,}5^\circ,\ d = (30{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{cm}.$$

Determine la altura de la montaña con su respectivo error.

A9. Espere las instrucciones del profesor antes de pasar a hacer uso del programa “Tutorial de Física” en el computador personal.



REFERENCIAS

1. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, Phillip R. Bevington (McGraw-Hill, 1969).

2. *An introduction to error analysis*, John R. Taylor (University Science Books, 1997)

3. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/unidadMedida.htm