Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer Semestre 2020

Sobre cálculo de multiplicación de permutaciones

Sea $\mathcal{S}_n$ el grupo simétrico asociado a n elementos. La multiplicación se define de la siguiente manera: si

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \sigma(1) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \eta : \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \eta(1) & ... & \eta(n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

son dos elementos, su producto es

$$\sigma\eta : \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \sigma(\eta(1)) & ... & \sigma(\eta(n)) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Para calcular productos, podemos pensar también en la acción de la permutación sobre un ocnjunto de n elementos ordenados.

Consideremos el caso de $n = 6$, y el producto de ciclos

$$(1234)(34)(125)(236) \tag{3}$$

A partir de la definición, sabemos que el producto es

$$(1234)(34)(125)(236) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (13652) \tag{4}$$

Usando la acción sobre un conjunto de 6 elementos: renglón a renglón vamos viendo cuál es el efecto de la permutación sobre el conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & b & c & d & e & f \\ \hline a & f & b & d & e & c \\ \hline e & a & b & d & f & c \\ \hline e & a & d & b & f & c \\ \hline b & e & a & d & f & c \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ (236) \\ (125) \\ (34) \\ (1243) \end{array} \tag{5}$$

Es decir, si seguimos el rastro de la primera letra, vemos que fue al tercer lugar, la segunda letra al primer lugar, etc. lo que podemos escribir así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (13652) \tag{6}$$

es decir, el mismo resultado. Como conjunto podríamos haber tomado a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en ese caso hay que tener cuidado de no marearse :P