Matemática II
Curso 2024

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 2 - Matrices

1. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Calcular: $4A + B$, $(2A)^t - 3B^t$, AB, CA, $CAAB$.

2. *a*) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. ¿Es cierto que si $a \neq 0$ y $ab = ac$ entonces $b = c$? Justificar la respuesta.

   b) Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcular AB y AC. Concluir lo siguiente:

$$\left.\begin{matrix} AB = AC \\ A \neq O \end{matrix}\right\} \quad \not\Rightarrow \quad B = C$$

   c) ¿Cuál es la diferencia esencial entre el caso escalar (es decir "numérico") y el caso matricial? Recuerde la relación entre los números reales y las matrices 1×1. ¿Conoce alguna situación en la que $AB = AC$ implique $B = C$?

3. Un laboratorio fabrica tres productos (A, B y C) cada uno de los cuales requiere de ciertas cantidades de tres tipos de materia prima y de mano de obra. La matriz R resume los requerimientos por unidad de cada producto:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Las necesidades de materias primas se dan en *kg* por unidad y las de mano de obra en *horas* por unidad. Por ejemplo, la primera fila de R indica que para producir una unidad de producto A, se necesita 2 kg de la primera materia prima, 4 kg de la segunda, 5 kg de la tercera y 5 horas de mano de obra. Las tres materias primas cuestan \$2, \$3 y \$1,50 por *kg* respectivamente. Los costos de mano de obra son de \$5 por *hora*. Suponga que se deben fabricar 500, 1000 y 400 productos de tipo A, B y C respectivamente. Plantee las operaciones matriciales que deben realizarse para calcular el costo total de la producción.

4. *a*) Hallar, si es posible, la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   b) Considera los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 7y & = & 1 \\ x - 2y & = & 1 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y & = & 2 \\ x + z & = & 10 \\ x + 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

1) Escríbelos en forma matricial.

2) Resuélvelos utilizando a).

$c)$ Resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-2y+3z & = & 1 \\ 3x+y+2z & = & 1 \\ 3x-8y+3z & = & 1 \end{array}\right.$.

$d)$ Hallar una matriz X tal que: $XB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Verificar que $AB = BA = O$, $AC = A$, $CA = C$, $C^2 = C$, $A^2 = A$. Deducir que A, B y C **no** son invertibles.

6. Sea $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ una matriz diagonal.

   (a) Calcular D^2 y D^3.

   (b) Inducir una fórmula para D^n, donde n es un natural cualquiera.

   (c) Probar que D es invertible si y sólo si, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ y, en ese caso hallar D^{-1}.

7. Número de condición

   El número de condición de una matriz estudia cuánto cambia la solución a un sistema por pequeñas perturbaciones. Su importancia radica en que cuando se obtienen datos de la realidad estos no son exactos y tienen un cierto margen de error. El número de condición dice si esos errores pueden llegar a afectar en gran medida el resultado obtenido.
   Este ejercicio intenta introducir el problema, veremos más sobre el número de condición en repartidos posteriores.

   $a)$ Resolver el sistema $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}999 \\ 0{,}999 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1{,}999 \\ 1{,}999 \end{pmatrix}$ (es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas)

   $b)$ Considerar el sistema $AX = B_1$, con la misma matriz A, y $B_1 = \begin{pmatrix} 1{,}989 \\ 2{,}009 \end{pmatrix}$. Dar una estimación del valor de X sin resolver el sistema.

   $c)$ Resolver $AX = B_1$. ¿Obtuviste un resultado cercano al que esperabas?

   $d)$ Resolver $AX = B_2$, con $B_2 = \begin{pmatrix} 2{,}009 \\ 2{,}009 \end{pmatrix}$.

   $e)$ Discutir interpretaciones de los resultados obtenidos.

8. Transiciones en una población

   La población de un país está distribuida en tres grupos: los que viven en ciudades, los que viven en zonas rurales, y los que viven en el exterior del país. Llamemos c, r y e a los porcentajes de pobladores en cada grupo. Cada año, algunos habitantes cambian su situación, según el siguiente esquema:

de la **c**iudad	de la población **r**ural	del **e**xterior
60 % sigue en la ciudad,	40 % se mudan a la ciudad,	10 % vuelven a la ciudad,
10 % pasa a zona rural,	40 % permanece donde está,	10 % a zonas rurales,
30 % emigran al exterior,	20 % parte fuera del país,	80 % sigue en el exterior.

En este modelo del comportamiento de la población no tenemos en cuenta el efecto de muertes y nacimientos.

a) Si un año comienza con un 40 % de la población en la ciudad, un 30 % en zonas rurales, y un 30 % en el extranjero, ¿cuál será la distribución a fin del año? ¿Cómo comenzó el año anterior?

b) Hallar la expresión general de la transición de los porcentajes (c, r, e) de un año al siguiente.

c) ¿Existe alguna distribución (c, r, e) de la población tal que los porcentajes con los que las personas se distribuyen al final del año sean iguales a los del comienzo del año?