Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 3 - Determinantes

1. Calcular el determinante de las matrices siguientes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calcular los siguientes determinantes:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

3. *a*) Sea A una matriz 4×4 tal que $\det(A) = -3$. Calcular $\det(-2A)$.
   b) Sea A una matriz 5×5 tal que $\det(A) = -3$. Calcular $\det(-2A)$.
   c) Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es antisimétrica (o sea, $A^t = -A$) y n es impar entonces $\det(A) = 0$.
   d) Dar un ejemplo que pruebe que no es cierto que $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ con $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

4. Sean A, B dos matrices de 3×3 tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B^t) = -5$. Calcular:

$$\det(A^4)\,, \qquad \det(A \cdot B)\,, \qquad \det([B(2A)^{-1}]^t)\,.$$

5. Sea $A = \begin{bmatrix} \lambda & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a) Determinar los valores de λ que hacen que A no sea invertible.
   b) Calcular A^{-1} para $\lambda = 4$ usando la fórmula de la inversa.

6. *a*) Probar que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

   son iguales a $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
   b) Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 & 100 & 17 & 25 \\ 0 & -2 & 23 & 52 & 30 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 & 4 \\ 6 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix}.$$

8. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

   a) Si $A^2 = A$ se dice que A es idempotente. Determine los posibles valores para $\det(A)$ cuando A es idempotente.

   b) Si $A^2 = \mathrm{Id}$ se dice que A es una involución. Determine los posibles valores para $\det(A)$ cuando A es una involución.

   c) Si $A^k = 0$ para algún valor $k \in \mathbb{N}$ se dice que A es nilpotente. Determine los posibles valores para $\det(A)$ cuando A es nilpotente.

   d) Si $A^tA = \mathrm{Id}$ se dice que A es ortogonal. Determine los posibles valores para $\det(A)$ cuando A es ortogonal.