TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA – hoja 2 ejercicios
2024 – POSTGRADO

17.
a. Verifique que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante rotaciones, inversiones espaciales e inversiones temporales.
b. Verifique que son invariante el vector de Poynting, la densidad de de energía y el tensor de Maxwell.

18.
Si por un conductor o semiconductor fluye una corriente debido a un campo eléctrico aplicado, y se aplica un campo magnético transverso, se crea una componente de campo eléctrico en la dirección ortogonal ambos campos, que produce una diferencia de potencial entre los lados del conductor. Esto se conoce como el efecto Hall.
a. Use las propiedades de los campos ente rotaciones y reflexiones espaciales, asumiendo una expansión de serie de Taylor alrededor de campo magnético cero, para mostrar que para un medio isótropo la generalización de la ley de Ohm, corregida a segundo orden en el campo magnético, debe tener la forma $\boldsymbol{E}=\rho_0 \boldsymbol{J}+R(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{J})+\beta_1 H^2 \boldsymbol{J}+\beta_2(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{H}$, donde ρ_0 es la resistividad en ausencia de campo magnético y R se llama el coeficiente Hall.
b. Indique si las propiedades de inversión temporal introducen algún requerimiento.

19.
Para el cuadrupolo eléctrico, considere de nuevo el término simétrico que la da origen en el caso de fuentes y cargas que dependen en forma armónica del tiempo, y repita la deducción vista en clase en este caso:

a. Muestre que el potencial vector es en zonas lejanas $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\rho\, \boldsymbol{x}' d\boldsymbol{x}'$

b. Verifique que los campos son $\boldsymbol{H}=ik\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}/\mu_0$: $\boldsymbol{E}=ik\,Z_0(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}/\mu_0$

c. Además, $\boldsymbol{H}=-\frac{ick^3}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$ con $Q_{\alpha\beta}=\int(3r_\alpha r_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{x}'$ y $Q_\alpha=\sum_\beta Q_{\alpha\beta}n_\beta$.

d. Entonces, la potencia media por unidad de ángulo sólido es $\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c^2 Z_0}{1152\pi^2}k^6|[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})]\times\boldsymbol{n}|^2$.

e. Obtenga que $\int n_\alpha n_\beta\, d\Omega=\frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta}$, $\int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta\, d\Omega=\frac{4\pi}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$ y entonces muestre que $\int|[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})]\times\boldsymbol{n}|^2 d\Omega=\frac{4\pi}{5}\sum_{\alpha\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2$, de forma que la potencia media total se puede escribir $P=\frac{c^2 Z_0 k^6}{1440\pi}\sum_{\alpha\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2$.

20.
Muestre que para multipolos dipolar eléctrico, magnético y cuadrupolar eléctrico se cumple que la potencia total instantánea está dada por la expresión $P = P_E + P_M + P_{QE}$.

21.
a. Considere una esfera dieléctrica pequeña en presencia de una onda plana. Calcule los momentos dipolares eléctrico y magnético inducidos.
b. Idem para una esfera conductora perfecta.

22.
Dos dipolos eléctricos fijos de momento dipolar p están en el plano x-y a una distancia 2a, con ejes paralelos y perpendiculares al plano, pero con momentos opuestos. Los dipolos rotan con velocidad angular constante w alrededor del eje z localizado en el punto medio. El movimiento es no relativista $\omega a \ll c$.
a. Encuentre los momentos multipolares no nulos de menor orden.
b. Muestre que el campo magnético en la zona de radiación es, a menos de un factor de fase,

$$\boldsymbol{H}=\frac{cpa}{2\pi}k^3[(\hat{\boldsymbol{x}}+i\,\hat{\boldsymbol{y}})\cos\theta-\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\, e^{i\phi}]\cos\theta\frac{e^{ikr}}{r}$$

c. Muestre que la distribución angular de la radiación es proporcional a ($\cos^2\theta+\cos^4\theta$) y que la potencia total media radiada es $P=\frac{4}{15\pi\epsilon_0}c k^6 p^2 a^2$.

23.

Un sistema radiante puede ser una distribución de cargas fijas puestas en rotación. En este caso no es de la forma $\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$.

a. Muestre que para cargas rotando se pueden calcular momentos multipolares *reales*, dependientes del tiempo, usando directamente la expresión de ρ(**r**,t). Los momentos multipolares para una frecuencia dada con la definición de ρ dada al principio del problema se pueden calcular con una descomposición de Fourier de los momentos dependientes del tiempo.

b. Considere una densidad de carga ρ(**r**,t) periódica en el tiempo con perҩdo $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$. Expanda en serie de Fourier; muestre que puede ser escrita como:

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0(\boldsymbol{r})+\sum_{n=1}^{\infty}\Re e\left[2\rho_n(\boldsymbol{r})e^{-in\omega_0 t}\right] \quad \text{donde} \quad \rho_n(\boldsymbol{r})=\frac{1}{T}\int_0^T\rho(\boldsymbol{r},t)e^{in\omega_0 t}dt$$

Estas fórmulas muestran en forma explícita como conectar cargas rotando con $\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$.

c. Considere una carga q rotando en un plano x-y en un ciírculo de radio R a velocidad angular constante ω_0 . Calcule los momentos dipolares por los métodos de la parte a. y b. y compare. Usando la parte b. exprese la densidad de carga $\rho_0(\boldsymbol{r})$ en coordenadas cilíndricas. ¿Hay multipolos de orden superior, por ejemplo, cuadrupolos? Indique las frecuencias.

24.

Una onda plana monocromática, polarizada linealmente incide sobre una esfera pequeña conductora. Encuentre el ángulo que forman los vectores de onda incidente y dispersado para el cual el campo eléctrico de radiación inducido en la esfera es paralelo al campo eléctrico incidente.

25.

a. Muestre que para una polarización inicial arbitraria, la sección eficaz de difusión de una esfera conductora perfecta de radio a, sumada en las polarizaciones finales, estκ dada en el límite de grandes longitudes de onda por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = k^4a^6\left[\frac{5}{4} - |\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \mathbf{n}|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\epsilon}_0)|^2 - \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}\right]$$

donde $\mathbf{n}_0$ y **n** son las direcciones de las radiaciones incidentes y difundidas respectivamente y $\boldsymbol{\epsilon}_0$ es el vector polarización de la radiación incidente ($\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 1$; $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0$).

b. Si la radiación incidente es linealmente polarizada, muestre que la sección eficaz es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = k^4a^6\left[\frac{5}{8}(1 + \cos^2\theta) - \cos\theta - \frac{3}{8}\sin^2\theta\cos 2\phi\right]$$

donde $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0 = \cos\theta$ y el ángulo azimutal Φ está medido desde la dirección de la polarización lineal.

c. ¿Cuál es el cociente de las intensidades difundidas en θ = π/2 , Φ = 0 y en θ = π/2, Φ = π/2 ? Explique físicamente en términos de los multipolos inducidos y sus distribuciones de radiación.

26.

Una esfera conductora perfecta de radio a dispersa radiación electromagnética que incide con polarización elíptica descrita por un vector de polarización

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}(\boldsymbol{\epsilon}_+ + re^{i\alpha}\boldsymbol{\epsilon}_-)$$

Generalice la expresión de la amplitud para la dispersión que conduce a la sección eficaz vista en clase para este caso (observe que r = 0 y r = ∞ corresponden a polarizaciones circulares). Calcule la sección eficaz en la aproximación de Rayleigh y muestre que es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4a^6\left[\frac{5}{8}(1 + \cos^2\theta) - \cos\theta - \frac{3}{4}\left(\frac{r}{1 + r^2}\right)\sin^2\theta\cos(2\phi - \alpha)\right]$$

Compare con el problema anterior.