

Práctico 4 - Inversa de una matriz. Diagonalización.

1. Se consideran las matrices

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular sus determinantes y en caso de invertibilidad, hallar la inversa.

2. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones. Decidir, sin resolverlos, cuántas soluciones tiene cada uno.

$$\begin{cases} -2x - 7y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + 8y + 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2z + t = 0 \\ y - 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

3. Sea la matriz $A = PDP^{-1}$ donde:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz A .
- b) Calcular A^n para todo n natural.
- c) Determinar el comportamiento de $A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ para valores de n que crecen indefinidamente, discutiendo según la condición inicial $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

4. Hallar los valores propios de las matrices del ejercicio 1

5. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio 1 es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A = PDP^{-1}$.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz tal que $v = (2, 6, 0)$, $w = (2, 2, 1)$ y $u = (1, 2, 0)$ son vectores propios de A .

- a) Determinar si A es o no diagonalizable.
- b) Calcular los valores propios de A y determinar los valores de r , s y t .

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P que diagonalicen a A .
- Calcular A^n para cualquier natural n .
- Estudiar el comportamiento asintótico de $A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ para cualquier condición inicial (a_0, b_0) .

8. Encontrar los valores propios de las siguientes matrices y determinar si son diagonalizables. En caso afirmativo, hallar D diagonal y P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1000 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

9. Supongamos que A es una matriz invertible. Probar que entonces 0 no es valor propio de A .

10. Supongamos que A es una matriz invertible y diagonalizable.

- Demostrar que la inversa de A también es diagonalizable.
- Conociendo los valores propios de A , ¿podemos deducir los de su inversa?

11. Una población está tomada por una epidemia y se distribuye en dos estados: el estado **I** de sanidad y el estado **II** de enfermedad. Se sabe que cada año la mitad de la población sana se contagia, pasando del estado **I** al **II**, mientras que un tercio de la población enferma se cura, pasando del estado **II** al **I**.

- Describir un modelo matricial que calcule la distribución de la población (en sana y enferma) en el año $k + 1$ a partir de la distribución de la población en el año k .
- ¿Qué sucederá con la distribución de la población al pasar el tiempo?

12. Sistema predador – presa

En un bosque de Secuoyas, las ratas pie pardo constituyen una parte fundamental de la dieta de los búhos manchados, el depredador principal de estas ratas.

Notemos B_k a la cantidad de búhos en el mes k y R_k la cantidad de ratas (medidas en miles) en el mes k . La cantidad de ratas y búhos va cambiando mes a mes. Sea $x_k = \begin{pmatrix} B_k \\ R_k \end{pmatrix}$ el cambio mes a mes

en las poblaciones viene dado por $x_{k+1} = A \cdot x_k = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix} x_k$.

- Hallar los valores propios de la matriz A y los vectores propios correspondientes.
- Determinar si hay algún valor inicial de ratas y búhos que haga que ninguna de las dos especies se extinga.