Matemática II – módulo 1
Curso 2024

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 5 - Aplicaciones de diagonalización

1. Tenemos una población de plantas con una distribución variada de los genotipos AA, Aa y aa. Decidimos empezar a cruzar esta población con plantas que solo sean de genotipo Aa.

   Sea $Y_k = (p_k, q_k, r_k)$ el vector de distribución de genotipos correspondiente a la k-ésima generación, $k = 0, 1, \dots$ (escrito en forma horizontal).

   a) Hallar una matriz M tal que $Y_k = MY_{k-1}$, para todo $k \geq 1$.

   b) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $M = PDP^{-1}$.

   c) Hallar D^k y M^k, para k genérico.

   d) Deducir qué sucede a largo plazo.

   e) Comparar con el resultado obtenido al cruzar con plantas de genotipo AA.

2. Se considera una población de dividida en dos clases de edad, y su matriz de Leslie es $L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar su valor propio dominante λ_1 y un vector propio asociado a él.

   b) A partir del vector de distribución inicial de edades $X_0 = (100, 0)$, calcular: X_1, X_2, X_3 y X_4, redondeando si es necesario.

   c) Calcular X_5 usando las fórmulas: $X_5 = LX_4$ y $X_5 \approx \lambda_1 X_4$.

   d) Estudiar el comportamiento límite de esta población y su distribución por edades.

3. Se considera una población dividida en tres clases de edad de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Si originalmente hay 120 hembras en la primera clase, 80 en la segunda y 40 en la tercera, hallar cuántas habrá en total al cabo de 20 años.

   b) Sea $v = (1, 1, 1/2)$. Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $Lv = \alpha v$.

   c) Indicar si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse.

   d) ¿A qué distribución de edades (en porcentajes) tiende la población?

4. Se considera una población dividida en dos clases de edad de un año cada una.

   a) Hallar su matriz de Leslie L sabiendo que en promedio:

   - cada hembra de menos de un año tiene un descendiente;
   - cada hembra de entre uno y dos años tiene seis descendientes;
   - de las hembras de menos de un año sobrevive una de cada tres.

   b) Hallar los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2$ de L.

   c) Hallar los vectores propios v_1 y v_2 de L asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

d) Supongamos que inicialmente hay treinta hembras de menos de un año y diez de entre uno y dos años. Hallar explícitamente $c \in \mathbb{R}$ tal que $X_k \approx c\lambda_1^k v_1$ para valores grandes de k (X_k es el vector de distribución de edades).

e) Con la suposición anterior sobre la población inicial, dar una estimación de la cantidad de hembras de menos de un año que habrá al transcurrir diez años.

5. Consideremos una población dividida en tres clases de edad de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Inicialmente tenemos la siguiente distribución de hembras por clase: 16 hembras entre 0 y 10 años, 18 de entre 10 y 20 años y 8 de entre 20 y 30 años. ¿Cuántas hembras habrá en cada clase al cabo de 10 años?

b) Decidir si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse al transcurrir el tiempo.

c) Si a largo plazo hay 200 hembras en la primera clase, ¿cuántas hembras habrá en las otras clases?

6. El crecimiento de una población de hembras se modela mediante la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & x & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo x un número entero positivo.

a) Determinar x para que $\lambda = 1$ sea una valor propio. A partir de esto, discutir según x si la población crece, decrece o se estabiliza.

b) Para el valor de x que hace estable a la población, estimar la cantidad de hembras que habrá en cada clase a largo plazo si hay 120 hembras en la primera clase.