Parcial de EDP y Transformada de Fourier

Parcial I - 25/05/2020

1. (a) Demuestre que si $u,\ v : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son dos funciones armónicas entonces,

$$\nabla(u\nabla v) = \nabla(v\nabla u). \tag{1}$$

   (b) Sea $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función armónica. Pruebe el teorema del valor medio,

$$u(y) = \fint_{\partial B(y,r)} u(x)ds(x), \tag{2}$$

   para toda bola $B(x,r)$ con clausura en U, usando (apropiadamente) la igualdad anterior (1) con $v(x)$ la solución fundamental Φ centrada en y.

2. Una función $v : \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \in C^0(\bar{U}) \cap C^2(U)$, se dice subarmónica si,

$$\Delta v \geq 0, \quad \text{en} \quad U. \tag{3}$$

   (a) Pruebe que si v es subarmónica, entonces para toda bola $B(x,r)$ con clausura en U, se cumple,

$$v(x) \leq \frac{1}{Vol(B(x,r))} \int_{B(x,r)} v(y)dy. \tag{4}$$

   (b) Pruebe que si $\bar{U}$ es compacto entonces $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$.

   (c) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y convexa. Demuestre que si u es armónica entonces $v = \phi(u)$ es subarmónica.

   (d) Demuestre que si u es armónica entonces $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica.

3. Sea $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una solución a la ecuación del calor con dato inicial $u(x,0)$ de soporte compacto.

   (a) Demuestre que existe $\lambda > 0$ tal que,

$$|u(x,0)| \leq \lambda \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{4\pi}}, \tag{5}$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Demuestre que $u(x,t)$ tiene el siguiente decaimiento cuando $t \to \infty$,

$$|u(x,t)| \leq \frac{c}{\sqrt{t}}, \tag{6}$$

   con c una cierta constante. Sug: argumente con la solución a la ecuación del calor,

$$v(x,t) = \pm u(x,t) + \lambda \frac{e^{-x^2/2(1+t)}}{\sqrt{4\pi(1+t)}}, \tag{7}$$

   usando el principio del máximo, (Teorema 6 del Evans).