

27.

Muestre que

1. $\vec{L} \times \vec{L} = i \vec{L}$

2. $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$

3. $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$

4. $\vec{X}_{\ell,m} \cdot \vec{r} = 0$

5. $\int \vec{X}_{\ell',m'}^* \cdot \vec{X}_{\ell,m} d\Omega' = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m',m}$

6. $\int \vec{X}_{\ell,m}^* \cdot \vec{r} \times \vec{X}_{\ell,m} d\Omega$

7. $L_{\pm} Y_{\ell,m} = \sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)} Y_{\ell,m \pm 1}$

8. $\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} |\vec{X}_{\ell,m}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi}$

9. Grafique en 3D los multipolos (1,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,1), y $|\mathbf{X}_{\ell,m}|^2$.

10. $\vec{\nabla} \times f_{\ell} \vec{X}_{\ell,m} = i \vec{n} \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r} f_{\ell}(r) Y_{\ell,m} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r f_{\ell}(r)] \vec{n} \times \vec{X}_{\ell,m}$

11. $\frac{1}{k^2} \int [\vec{\nabla} \times f_{\ell} \vec{X}_{\ell',m'}]^* [\vec{\nabla} \times g_{\ell} \vec{X}_{\ell,m}] d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \{ f_{\ell}^* g_{\ell} + \frac{1}{k^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r f_{\ell}^* \frac{\partial}{\partial r} (r g_{\ell})] \}$

28.

Usando los multipolos esféricos vectoriales, demuestre que para una superposición cualquiera de multipolos esféricos, la potencia total se escribe como una suma

incoherente de las contribuciones de cada multipolo: $P = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{\ell,m} [|a_E(\ell,m)|^2 + |a_M(\ell,m)|^2]$.

29.

a. Si se define paridad a sustituir el vector \mathbf{r} por $-\mathbf{r}$, indique cómo cambian r , θ , ϕ .

b. Idem para los armónicos esféricos y para el operador \mathbf{L} .

c. Calcule ahora las propiedades ante paridad de los campos multipolares eléctrico y magnéticos.

30.

Muestre que para la dispersión de ondas planas polarizadas circularmente, si los coeficientes cumplen $\alpha_{\pm}(\ell) = \beta_{\pm}(\ell)$ para todo ℓ la onda dispersada está polarizada circularmente.

31.

a. Para la dispersión de una onda circularmente polarizada y $ka = 1/2$, siendo $Z_s/Z_0 = 1$ calcule la sección eficaz total cortando el desarrollo para ℓ de 1 hasta 5, y compare con la esfera conductora perfecta.

b. Para los mismos casos, grafique la sección eficaz diferencial dividada a^2 en función de θ .