Matemática II, módulo 2
Curso 2024

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 2: Derivadas parciales y direccionales. Puntos estacionarios, extremos relativos y absolutos.

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$x+y$	$2x-3y$	xy	x^2+y^2	$(x+y)^2$
$\frac{1}{x+y}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{x+y}{x-y}$	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$\frac{x-y}{x^2-y^2}$
e^{x+y}	e^{x^2y}	$Ln(x+y)$	$e^x + Ln(y)$	$Ln(x^2+3y)$
$\sin(x+y)$	$\cos(x-2y)$	$\sin(x^2+y)$	$\sin(x)+\cos(y)$	$\sin(x)$
$\sin(e^x+y^2)$	$\sin\left(\cos\left(x+\frac{1}{y}\right)\right)$	$e^{\sin(x)}\cos(x)$	$Ln(e^{x^2}+y)$	$Ln(\sin(x)+y^2)$

2. La función de Holling se utiliza en ecología para expresar el número P de presas devoradas por un depredador (en un intervalo de tiempo fijado T_0), en función de dos variables: la densidad de presas disponibles d, y el tiempo de caza t, que necesita e predador para perseguir, dominar, consumir y digerir cada presa:
$$P = f(d,t) = \frac{\alpha d T_0}{1+\alpha t d}$$
La constante α es una constante positiva, que se suele interpretar como la tasa de ataque del depredador.

   Calcular las derivadas parciales de la función f e interpretar su signo.

3. Calcular las derivadas direccionales de las funciones de la primera fila del Ejercicio 1 con respecto a la dirección de la recta $y = 2x$ y de las funciones de la segunda fila, con respecto a la dirección del vector $v = (3,1)$.

4. Calcular $f_x(3,3)$, $f_y(1,2)$, $f_v(-1,1)$ para la función $f(x,y) = \frac{x}{y}$ y siendo v como en el Ejercicio 3.

5. Hallar los puntos estacionarios y determinar el conjunto imagen de las siguientes funciones, definidas en $\mathbb{R}^2$.

   a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - 2y^2 - 3x^2 + 1$,
   b) $f(x,y) = e^x - y$,
   c) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$,
   d) $f(x,y) = Ln(2x^2+y^2)$,
   e) $f(x,y) = (x+y)^3$.

6. Calcular la matriz hessiana de las funciones del ejercicio 5.

7. Clasificar los puntos estacionarios de las funciones del ejercicio 5.

8. Se consideran las funciones
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad h(x,y) = Ln(x^2+y^2).$$
   Para cada una de ellas:

a) hallar el dominio y la imagen,

b) averiguar si presenta extremos relativos.

c) averiguar si alcanza un máximo absoluto y/o un mínimo absoluto en su dominio.

d) hallar los extremos absolutos alcanzados en la región encerrada entre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2 y la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 5.

9. Se consideran las funciones

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2, \quad g(x,y) = x + y^2, \quad h(x,y) = (x+2y)^2.$$

Para cada una de ellas:

a) hallar los posibles extremos relativos.

b) averiguar los extremos absolutos en la región encerrada por el triángulo de vértices $(0,0), (1,-1)$ y $(1,1)$.

10. La densidad d de una bacteria en función de la temperatura (en grados celcius) y el pH en condiciones de laboratorio (bajo nutrientes ilimitados) se describe de la siguiente manera:

$$d = -450 + 125pH + 5T - 9(pH)^2 - 0{,}1(T)^2$$

Tomando como dominio $pH \in [5;10]$ y $T \in [0,50]$, calcule la temperatura y el pH que maximizan la densidad de las bacterias