1er Parcial Teoría electromagnética Posgrado 2024
2 horas - setiembre 2024

1.

Considere una onda plana incidente sobre una pequeña esfera. Se induce en la esfera únicamente un momento magnético instantáneo proporcional al campo magnético incidente:

$$\vec{m}=4\pi a^3\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\vec{H}_0$$

a. Calcule las 4 secciones eficaces correspondientes a polarizaciones incidentes paralela y perpendicular al plano de dispersión, correspondientes a dispersiones con polarización final paralela $\|$ y perpendicular $\perp$ al plano de dispersión:

$$\frac{d\sigma_{\|,\|}}{d\Omega};\quad \frac{d\sigma_{\perp,\perp}}{d\Omega};\quad \frac{d\sigma_{\|,\perp}}{d\Omega};\quad \frac{d\sigma_{\perp,\|}}{d\Omega}$$

b. Calcule el tensor de polarización. Comente el resultado.

2.

Considere dos partículas de igual carga **q** que se mueven en un diámetro de un círculo de radio **a** y con velocidad angular **w**.

a. Para grandes longitudes de onda (o velocidades no relativistas) calcule la distribución angular de la potencia promedio radiada y la potencia total promedio radiada por ciclo.

b. Considere ahora una carga **2q** en el mismo círculo que se mueve a igual velocidad angular. Calcule la potencia total promedio radiada por ciclo en este caso.

c. Observe que la corriente promedio en un ciclo es igual en el caso a. y b. , compare las potencias totales y explique el resultado.

3.

Considere las siguientes propuestas de elección de gauge:

3.1 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$

3.2 $\Phi=0$

a. Escriba las ecuaciones de Maxwell para los potenciales en cada una de estas elecciones de gauge.

b. Demuestre si las elecciones anteriores 3.1 y 3.2 son una elección de gauge legítima.

c. En caso que ambos sean legítimos, indique qué debe cumplir la función que permite pasar del gauge 3.1 al 3.2.

d. Muestre que en el caso para 3.1, y para una velocidad de propagación imaginaria, ic, Φ verifica una ecuación de ondas, y escriba la solución de la ecuación de Helmholtz correspondiente.

e. Para el caso de 3.2, muestre que $-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ satisface una ecuación de ondas con fuentes que se escriben en función de ρ y $\boldsymbol{J}$; además escriba la misma y su solución retardada.

$$\mathbf{E}_{\rm inc} = \boldsymbol{\epsilon}_0 E_0 e^{ik\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{x}} \qquad \mathbf{E}_{\rm sc} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\mathbf{m}/c]$$

$$\mathbf{H}_{\rm inc} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_{\rm inc}/Z_0 \qquad \mathbf{H}_{\rm sc} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_{\rm sc}/Z_0$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}; \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\epsilon}_0) = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}^*)\cdot\mathbf{m}/c|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}; \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\epsilon}_0) = \frac{r^2 \frac{1}{2Z_0} |\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{E}_{\rm sc}|^2}{\frac{1}{2Z_0}|\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{E}_{\rm inc}|^2} \qquad \Pi(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} - \frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} + \frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega}}$$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{Z_0}{16\pi^2 c^2}\left|\left[\mathbf{n}\times\frac{d^2\mathbf{p}}{dt'^2}(t')\right]\times\mathbf{n}\right|^2$$

where $t' = t - r/c$ is the retarded time. For a magnetic dipole $\mathbf{m}(t)$, substitute $(1/c)\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}$ for $(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{p}})\times\mathbf{n}$.

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{Z_0}{576\pi^2 c^4}\left|\left[\mathbf{n}\times\frac{d^3\mathbf{Q}}{dt'^3}(\mathbf{n}, t')\right]\times\mathbf{n}\right|^2 \qquad Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\rho(\mathbf{x})\, d^3x$$

Condición de Lorenz $\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$

Ecuación de Helmhotz para una función H con fuente F : $\nabla^2 H - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -4\pi F$

Solución de la ecuación de Helmhotz $H(\vec{r}, t) = \frac{\int F(\vec{r}\,', t - R/c)}{R} d^3 r' \; ; \; R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$

Ecuaciones de Maxwell para los potenciales

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}),$$

$$\Box^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$$