Teoría Electromagnética - posgrado – Práctico 5 - 2024

37.
Reproduzca los resultados obtenidos en clase que muestran que para electrones radiando en un átomo, siendo que el orden de tamaño es $R \simeq O(a_0/Z_{ef})$ siendo a_0 el radio de Bohr:

a1. $|M|/c|Q| \simeq O(\hbar/mcR) = O(Z_{ef}/137)$

a2. $\dfrac{\Gamma_M(l)}{\Gamma_E(l)} = O(Z_{ef}^2/137^2)$

a3. $\dfrac{\Gamma_{E,M}(l+1)}{\Gamma_{E,M}(l)} = O(k^2 R^2)$

a4. Calcule el orden de kR para transiciones atómicas y comente entonces los resultados anteriores.

a5. Indique para transiciones con cambio de paridad cuales son los multipolos de menor orden E y M que participan, y el orden del cociente de los mismos.

a6. Indique para transiciones sin cambio de paridad cuales son los multipolos de menor orden E y M que participan, y el orden del cociente de los mismos.

a7. Considere ahora transiciones nucleares, y estime kR, y obtenga:

$\dfrac{\Gamma_M(l)}{\Gamma_E(l)} = O(0.2\,A^{-2/3})$ y $\dfrac{\Gamma_E(l+1)}{\Gamma_M(l)} = O\left(\dfrac{(\hbar\omega[MeV])^2 A^{4/3}}{4000}\right)$

38.
a. Reproduzca la fórmula vectorial integral de Kirchhoff (ec. 10.90 Jackson), a partir de las secciones 10.5 y 10.6 del mismo libro:
a1. Use el teorema de Green para demostrar la fórmula 10.75 y 10.79.
a2. Obtenga la fórmula 10.90, (f. integral vectorial de Kirchhoff)
b. Obtenga entonces el teorema óptico, 10.91 a 93, que da la amplitud de difusión.
c. Escriba la potencia difundida, absorbida y total, (10.133 a 135)para obtener finalmente el teorema óptico, 10. 137.

39.
A partir de la conservación de la carga, muestre que J = (cρ, **J**) es un 4-vector. Para ello:
a. Reproduzca los resultados dados en clase para la densidad de carga, que muestran que transforma como la componente temporal de un 4-vector: considere un vol V con una carga Q en reposo, que define una densidad de carga ρ_0 = Q/V. Use la invariancia de la carga y la transformación de V ante una TL para calcular ρ_0 para un referencial en movimiento (ρ). Escriba entonces ρ en términos de las componentes de la 4-velocidad.
b. Considere ahora **J** = ρ**v**, siendo **v** la velocidad que define el referencial en movimiento. Escriba **J** en términos de alguna de las componentes de la 4-velocidad.
c. deduzca de lo anterior que J = (cρ, **J**) es un 4-vector.

40.
En clase mostramos que la ecuación $\dfrac{dp^0}{d\tau} = \dfrac{q}{c}\vec{U}\cdot\vec{E}$ permitía calcular los elementos $F^{0\beta}$ del tensor de campo para β=0,1,2,3. Considere ahora la parte espacial de la fuerza de Lorentz, $\dfrac{d\vec{p}}{d\tau} = \dfrac{q}{c}(U^0\vec{E} + \vec{U}\times\vec{B})$ para deducir la expresión de las demás componentes del tensor de campo F. En la forma en que se hizo en la clase, escriba entonces el tensor de campo completo. Exprese, finalmente, el tensor de campo como una matriz.

41.
a. Escriba la transformación de Lorentz inversa $(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}$ en función de $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$.
b. Muestre que para un tensor de rango 2, la matriz correspondiente se transforma ante una TL como B'= L B L^T para una transformación de Lorentz de matriz L.
c. Verifique que, en particular para g, que g'=g. Observe que la igualdad anterior es equivalente a

la invariancia del producto escalar de dos 4-vectores.
d. Demuestre que $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}$ es un pseudotensor y que en cualquier referencial toma los mismos valores. Calcule $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}\,\varepsilon_{\alpha\beta\eta\zeta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}\,\varepsilon_{\alpha\beta\eta\delta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\delta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}\,\varepsilon_{\alpha\nu\mu\delta}$.
e. Considere un "boost"en dirección x. Deduzca las componentes de los campos **E** y **B** en el nuevo referencial.
f. Demuestre las fórmulas dadas en clase para la transformación de **E** y **B** ante transformaciones de Lorentz (¨boost¨) en la dirección x, a partir de la TL del tensor de campo F. Repita ahora y obtenga el resultado para una TL definida por un "boost" de velocidad $\boldsymbol{\beta}$.
g. Muestre que un ¨boost¨ puede escribirse como $e^{-\zeta\vec{\beta}\cdot\vec{K}/\beta}=I-\sinh(\zeta)\vec{\beta}\cdot\vec{K}/\beta+(\cosh(\zeta)-1)(\vec{\beta}\cdot\vec{K}/\beta)^2$.

42.
a. Considere los tensores de campo F y su dual $\mathcal{F}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$. Calcule en función de los campos los invariantes Lorentz F^2 (escalar), $F\cdot\mathcal{F}$ (pseudoescalar) y $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}$ (escalar).
b. Muestre que si **E** y **B** son perpendiculares en un referencial entonces lo serán en cualquier referencial inercial,
c. $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ y $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ son invariantes ante TL,
d. dados campos tales que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$, existe un referencial, cuya velocidad se calculará, en el que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.
e. Muestre que un tensor antisimétrico A de rango 2 define un vector polar y otro axial dados por las componentes $p^i = A^{0i}$, $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ con $a^1 = A^{32}$, $a^2 = A^{13}$, $a^3 = A^{21}$ de forma que simbólicamente se puede escribir A= (**p**,**a**).

43.
En un sistema de referencia un campo eléctrico estático y uniforme E_0 es paralelo al eje x y una inducción magnética $B_0 = 2E_0$ de iguales propiedades está en el plano x-y y forma un ángulo θ con el eje x. Determine la velocidad de un sistema de referencia en el cual los campos son paralelos. Escriba los campos en este referencial para $\theta \ll 1$ y $\theta \to \pi/2$.

44.
a. Obtenga la fuerza de Lorentz a partir del lagrangeano de una particula en interacción electromagnética con campos externos.
b. Muestre que una trasnformacióin de gauge cambia el lagrangeano en una derivadad total, y por tanto no cmabia la dinámica del sistema.
c. A partir del lagrangerano escrito en forma manifiestamente covariante, obtenga las ecuaciones de movimiento para una partícula escritas en forma covariante.
d. Obtenga las ecuaciones de Hamilton a partir del hamiltoniano de una partícula en interacción electromagnética, y obtenga entonces la fuerza de Lorentz nuevamente.

45.
Ondas planas en la formulación covariante.
a. Muestre que si $\mathcal{J}^\alpha = 0$, entonces se verifica $\Box F_{\mu\nu}=0$.
b. Escriba la solución general de ondas planas de esta ecuación y muestre entonces que el vector de onda debe ser un 4-vector y cumple $k^2=0$.
c. Considere la TL a otro sistema, y encuentre entonces cómo se transforma el 4-vector k.
d. Deduzca el efecto Doppler relativista, $\omega'=\gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta)$. Muestre que los ángulos en ambos sistemas verifican $\tan(\theta')=\sin(\theta)/\gamma(\cos\theta-\beta)$. Observe que aun cuando $\theta=\frac{\pi}{2}$ existe efecto Doppler (trasnverso!).