Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2024

Examen teórico: julio de 2024

C.I.: ____________________

Appelido: ____ Nombre: ____

Duración: 1 hora.
1. La claridad de la presentación se tomará en cuenta.
2. Subrayar la respuesta correcta (verdadero o falso).

Verdadero o Falso ? Contesta y justifica.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f es impar, lo que quiere decir

$$f(-x) = -f(x)$$

   por todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la función compuesta $f \circ f$ es par.

   Verdadero   Falso

   Justificación: ____

   ____

   ____

   ____

2. La derivada de una función polinomial es una función polinomial.

   Verdadero   Falso

   Justificación: ____

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Sean dos funciones f y g definidas en $[0; +\infty)$ y que verifican $0 \leq f(x) \leq g(x)$ por todo $x \in [0; +\infty)$. Supongamos que

$$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

   Es verdadera la desigualdad siguiente:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

   Verdadero   Falso

   Justificación: ____

   ____

   ____

   ____

   ____

⋆

Solución.
Teórico: 36 puntos de 100.

1. **[12 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f es impar, lo que quiere decir

$$f(-x) = -f(x)$$

por todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la función compuesta $f \circ f$ es par.

Falso

Justificación: Sea $x \in \mathbb{R}$. Calculamos

$$f \circ f(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -f \circ f(x)$$

donde hemos utilizado dos veces que f es impar. Entonces la compuesta $f \circ f$ es impar.

2. **[12 puntos]** La derivada de una función polinomial es una función polinomial.

Verdadero

Una función polinomial p se escribe como

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

donde $n \geq 0$ es el grado de p, x es la variable y los α_k son los coeficientes. Derivamos

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k x^{k-1}$$

y se obtiene otro polinomio.

3. **[12 puntos]** Sean dos funciones f y g definidas en $[0; +\infty)$ y que verifican $0 \leq f(x) \leq g(x)$ por todo $x \in [0; +\infty)$. Supongamos que

$$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Es verdadera la desigualdad siguiente:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

Falso

Dado el Teorema de comparación sobre integrales impropias y la desigualdad $0 \leq f(x) \leq g(x)$, tenemos que

$$0 \leq \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Facultad de Ciencias **Cálculo diferencial e integral I**
Centro de Matemática **Primer semestre 2024**

Examen práctico: julio de 2024

C.I.: ____________________

Appelido: ____ Nombre: ____

Duración: 2 horas.
1. La claridad de la presentación se tomará en cuenta.
2. Subrayar la respuesta correcta (verdadero o falso).

Verdadero o Falso ? Contesta y justifica.

1. Sea la función:
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}.$$
Su dominio de definición es $D_{f_1} = (1; +\infty)$.
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

2. La derivada de $f_2(x) = x^2 e^{x^3}$ es
$$f_2'(x) = (3x^4 + 2x)e^{x^3}.$$
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

3. Es verdadera la desigualdad siguiente:
$$\int_0^1 \frac{1 + \cos(1/x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x < +\infty.$$
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

4. Tenemos la identidad siguiente
$$\int_{-4\pi}^{4\pi} x \operatorname{sen}(x) \mathrm{d}x = 4\pi.$$
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

5. Sea el problema de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y, \quad y(0) = 2.$$

La solución y verifica en $t = \ln(3)$:

$$y(\ln(3)) = 54.$$

VERDADERO FALSO

Justificación: ____

____

____

____

⋆

Solución
64 puntos de 100

1. **[12 puntos]** Sea la función:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}.$$

Su dominio de definición es $D_{f_1} = (1; +\infty)$.

FALSO

Escribimos:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 2}}.$$

Entonces $f_1(x)$ tiene sentido si

$$(x-1)^2 > 2,$$

osea si

$$x - 1 > \sqrt{2} \qquad \text{o} \qquad x - 1 < -\sqrt{2},$$

lo que es equivalente a

$$x > 1 + \sqrt{2} \qquad \text{o} \qquad x < 1 - \sqrt{2},$$

y entonces $D_{f_1} = (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$.

2. **[12 puntos]** La derivada de $f_2(x) = x^2 e^{x^3}$ es

$$f_2'(x) = (3x^4 + 2x)e^{x^3}.$$

VERDADERO

Derivamos el producto en $f_2(x) = x^2 e^{x^3}$ y entonces

$$f_2'(x) = 2xe^{x^3} + x^2(3x^2 e^{x^3}).$$

Simplificamos:

$$f_2'(x) = (3x^4 + 2x)e^{x^3}$$

y tenemos la expresión de la derivada.

3. **[12 puntos]** Es verdadera la desigualdad siguiente:

$$\int_0^1 \frac{1 + \cos(1/x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x < +\infty.$$

VERDADERO

Cómo $0 \leq 1 + \cos(1/x) \leq 2$ por todo $x \in (0; 1)$, tenemos

$$\int_0^1 \frac{1 + \cos(1/x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leq 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x < +\infty.$$

4. **[14 puntos]** Tenemos la identidad siguiente

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} x \operatorname{sen}(x) \mathrm{d}x = 4\pi.$$

FALSO

Tenemos

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} x \operatorname{sen}(x) \mathrm{d}x = 0$$

porque la función $x \operatorname{sen}(x)$ es impar (se puede justificar en detalles utilizando Chasles y el cambio de variable).

5. [**14 puntos**] Sea el problema de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y, \quad y(0) = 2.$$

La solución y verifica en $t = \ln(3)$:

$$y(\ln(3)) = 54.$$

Verdadero

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = C \exp(3t)$$

y con la condición inicial tenemos $C = 2$:

$$y(t) = 2 \exp(3t).$$

Ahora evaluamos:

$$y(\ln(3)) = 2 \exp(3 \ln(3)) = 2 \exp(\ln(27)) = 2 \times 27 = 54.$$