Facultad de Ciencias | **Cálculo diferencial e integral I**
Centro de Matemática | **Primer semestre 2024**

Examen teórico: agosto de 2024

C.I.: ____________________

Appelido: ____ Nombre: ____

Duración: 1 hora.
1. La claridad de la presentación se tomará en cuenta.
2. Subrayar la respuesta correcta (verdadero o falso).

Verdadero o Falso ? Contesta y justifica.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f es impar, lo que quiere decir
$$f(-x) = -f(x)$$
por todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la función derivada f' es par.

   Verdadero Falso

   Justificación: ____

   ____

   ____

   ____

2. Sea una funciòn f definida en $[1;+\infty)$ y que verifica $0 \leq f(x) \leq x^{-\alpha}$ por todo $x \in [1;+\infty)$ y por $\alpha > 1$. Es verdadera la desigualdad siguiente:
$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

   Verdadero Falso

   Justificación: ____

   ____

   ____

   ____

3. Sea un problema de Cauchy
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y, \quad y(0) = \beta,$$
con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. La solución y verifica
$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty.$$

   Verdadero Falso

   Justificación: ____

   ____

   ____

   ____

⋆

Solución.
Teórico: 36 puntos de 100.

1. **[12 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f es impar, lo que quiere decir

$$f(-x) = -f(x)$$

por todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la función derivada f' es par.

VERDADERO

Sea $x \in \mathbb{R}$. Derivamos

$$f(-x) = -f(x)$$

y se obtiene:

$$-f'(-x) = -f'(x)$$

donde se utilizo la derivaciön de una función compuesta. Simplificamos:

$$f'(-x) = f'(x)$$

y entonces f' es par.

2. **[12 puntos]** Sea una funciòn f definida en $[1; +\infty)$ y que verifica $0 \leq f(x) \leq x^{-\alpha}$ por todo $x \in [1; +\infty)$ y por $\alpha > 1$. Es verdadera la desigualdad siguiente:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

VERDADERO

Dado el Teorema de comparación sobre integrales impropias y la desigualdad $0 \leq f(x) \leq x^{-\alpha}$, tenemos que

$$0 \leq \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\mathrm{d}x < +\infty.$$

La ultima desigualdad es debida a $\alpha > 1$.

3. Sea un problema de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y, \quad y(0) = \beta,$$

con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. La solución y verifica

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty.$$

VERDADERO

La solución del problema de Cauchy es:

$$y(t) = \beta \exp(\alpha t),$$

y dado que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, deducimos

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty.$$

Facultad de Ciencias **Cálculo diferencial e integral I**
Centro de Matemática **Primer semestre 2024**

Examen práctico: agosto de 2024

C.I.: ____________________

Appelido: ____ Nombre: ____

Duración: 2 horas.
1. La claridad de la presentación se tomará en cuenta.
2. Subrayar la respuesta correcta (verdadero o falso).

Verdadero o Falso ? Contesta y justifica.

1. Sea la función:
$$f_1(x) = \sqrt{|x+1|}.$$
Su dominio de definición es $D_{f_1} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

2. La derivada de $f_2(x) = \cos(x)\sin(x^2)$ es
$$f_2'(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x)\cos(x^2).$$
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

3. Es verdadera la desigualdad siguiente:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x < +\infty.$$
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

4. Tenemos la identidad siguiente:
$$\int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} (18e^{2x} + 7e^{-2x})\mathrm{d}x = 311.$$
Verdadero Falso
Justificación: ____
____
____
____

5. Sea el problema de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 2.$$

La solución es

$$y(t) = \operatorname{sen}(4t).$$

VERDADERO   FALSO

Justificación: ____

____

____

____

⋆

Solución
64 puntos de 100

1. **[12 puntos]** Sea la función:
$$\sqrt{|x+1|}.$$
Su dominio de definición es $D_{f_1} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
Falso
Tal como $|x+1| \geq 0$ por cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt{|x+1|}$ tiene sentido. Resulta que: $D_{f_1} = \mathbb{R}$.

2. **[12 puntos]** La derivada de
$$f_2(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x^2)$$
es
$$f_2'(x) = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(x^2) + \cos(x)\cos(x^2).$$
Falso
Derivamos el producto en $f_2(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x^2)$ y entonces tenemos
$$f_2'(x) = -\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(x^2) + 2x\cos(x)\cos(x^2).$$
.

3. **[12 puntos]** Es verdadera la desigualdad siguiente:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x < +\infty.$$
Verdadero
Sea $M > 0$. Calculamos :
$$\int_0^M e^{-x}\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^M = -e^{-M} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-M}.$$
Entonces
$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty}(1 - e^{-M}) = 1.$$
Resulta que:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1 < +\infty.$$

4. **[14 puntos]** Tenemos la identidad siguiente
$$\int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} (18e^{2x} + 7e^{-2x})\mathrm{d}x = 311.$$
Falso
Queremos calcular la integral
$$\int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} (18e^{2x} + 7e^{-2x})\,\mathrm{d}x.$$
Primero tenemos:
$$\int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-\ln(5)}^{\ln(5)} = \frac{1}{2}(e^{2\ln(5)} - e^{-2\ln(5)}) = \frac{1}{2}\left(25 - \frac{1}{25}\right) = 1/2\times 624/25 = 624/50 = 312/25.$$
También:
$$\int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 312/25.$$
Entonces:
$$\int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} (18e^{2x} + 7e^{-2x})\,\mathrm{d}x = 18 \times 312/25 + 7 \times 312/25 = 312.$$

5. [**14 puntos**] Sea el problema de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 2.$$

La solución es

$$y(t) = \operatorname{sen}(4t).$$

Falso

Tenemos una ecuación de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0,$$

con

$$\omega = 4.$$

La soluciones son de la forma:

$$y(t) = A\cos(4t) + B\operatorname{sen}(4t).$$

Aplicamos $y(0) = 0$ y viene $A = 0$. Derivamos:

$$y'(t) = 4B\cos(4t).$$

Con la condición $y'(0) = 2$ viene $B = 1/2$. Entonces la solución es:

$$y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4t).$$