12do. Parcial Teoría electromagnética Posgrado 2024
2 horas – 1 noviembre 2024

---

1. (5 ptos)

Considere un sistema con coeficientes de multipolos vectoriales $a_E(1,1)=1$ y $a_m(1,1)=-2\mathrm{i}$.

a. Calcule la potencia promedio total emitida.

b. Calcule el cociente de potencia emitidas hacia adelante y hacia atrás, $\frac{P_{\rightarrow}}{P_{\leftarrow}}$

---

2. (7 ptos)

Tres cargas se localizan en el eje z: una carga "+ 2q" en el origen, y cargas "−q" en $z=\pm a\cos\omega t$. Asuma que $k\,a\ll 1$.

a. Escriba $\rho(\vec{r},t)=\rho(\vec{r})e^{-i\omega t}$.

b. Los coeficientes correspondientes a los multipolos eléctricos y magnéticos, a_E, a_M se calculan a partir de los multipolos $Q_{\ell m}, Q'_{\ell m}, M_{\ell m}$ y $M'_{\ell m}$. Calcule los multipolos $Q'_{\ell m}$, $M_{\ell m}$ y $M'_{\ell m}$.

c. Calcule la primera contribución no nula de multipolos vectoriales, indicando si en E o M. Calcule también

c1. la distribución angular de potencia instantánea y la promedio

c2. la potencia total instantánea y la promedio.

$$a_E(l,m)\simeq\frac{ck^{l+2}}{i(2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2}(Q_{lm}+Q'_{lm})\qquad Q_{lm}=\int r^lY^*_{lm}\rho\,d^3x\qquad Q'_{lm}=\frac{-ik}{(l+1)c}\int r^lY^*_{lm}\,\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\mathcal{M}})\,d^3x$$

$$a_M(l,m)\simeq\frac{ik^{l+2}}{(2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2}(M_{lm}+M'_{lm})\qquad M_{lm}=-\frac{1}{l+1}\int r^lY^*_{lm}\,\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{J})\,d^3x\qquad M'_{lm}=-\int r^lY^*_{lm}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}\,d^3x$$

$$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\qquad P_\ell(1)=1,\,P_\ell(-1)=(-1)^\ell\qquad Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}\quad Y_{l,-m}(\theta,\phi)=(-1)^mY^*_{lm}(\theta,\phi)$$

Table 9.1 Some Angular Distributions: $|\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)|^2$

l	$m=0$	±1	±2
1 Dipole	$\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$	$\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)$	
2 Quadrupole	$\frac{15}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta$	$\frac{5}{16\pi}(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$	$\frac{5}{16\pi}(1-\cos^4\theta)$

$$P_l^m(x)=\frac{(-1)^m}{2^ll!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

$$l=1\begin{cases}Y_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\\ Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\end{cases}$$

$$l=2\begin{cases}Y_{22}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}\\ Y_{21}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}\\ Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\begin{cases}\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0) & x_0,y_0,z_0\neq0\\ \frac{1}{2\pi r^2\operatorname{sen}\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) & x_0=y_0=0,\ z_0\neq0\\ \frac{1}{4\pi r^2}\delta(r-r_0) & x_0=y_0=z_0=0\end{cases}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{Z_0}{2k^2}\left|\sum_{l,m}(-i)^{l+1}[a_E(l,m)\mathbf{X}_{lm}\times\mathbf{n}+a_M(l,m)\mathbf{X}_{lm}]\right|^2$$

$$P=\frac{Z_0}{2k^2}\sum_{l,m}[|a_E(l,m)|^2+|a_M(l,m)|^2]$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4x\,dx=\frac{3\pi}{4}$$