Facultad de Ciencias.
Matemática Discreta 2020

Práctico 3: Cardinalidad

1. Sean A, B conjuntos finitos. Probar que

    a) Si existe una función inyectiva $f : A \to B$, entonces la cantidad de elementos de A es menor o igual que la de B.

    b) Si existe una función sobreyectiva $f : A \to B$, entonces la cantidad de elementos de A es mayor o igual que la de B.

    c) Si existe una biyección $f : A \to B$, entonces A y B tienen la misma cantidad de elementos.

2. Sean A, B conjuntos con n elementos y $f : A \to B$ una función. Probar que son equivalentes:

    - f es inyectiva
    - f es sobreyectiva
    - f es biyectiva

3. Demostrar que existen dos personas en el mundo con la misma cantidad de pelos en la cabeza.

4. Probar que dados 5 puntos dentro de un triángulo equilátero de lado 2, existe al menos un par de ellos que están a una distancia menor o igual a 1.

5. Sean T un triángulo y r una recta en el plano. Suponemos que la recta r no pasa por ninguno de los vértices de T. Probar que si r intersecta T, entonces intersecta exactamente dos de sus lados.

6. Probar esta versión más general del principio del palomar: si se meten $n.m + 1$ palomas en n jaulas, entonces hay una jaula que tiene por lo menos $m + 1$ palomas.

7. Probar que si B es numerable y $A \subset B$, entonces A es numerable.

8. Probar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un conjunto no numerable.

9. *a*) Sea I un conjunto numerable y $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos numerables. Probar que $\bigcup_{i \in I} X_i$ es numerable.

    b) Probar que el conjunto de todas las soluciones reales de ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, es un conjunto numerable.

c) Decimos que un número real $x \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si es raíz real de un polinomio con coeficientes racionales (de cualquier grado). Notamos por $\mathcal{A}$ al conjunto de los número algebraicos. Probar que $\mathcal{A}$ es numerable y que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathbb{R}$.

10. *a*) Sea $S \subset [0,1)$ el conjunto de números reales que tienen una expresión decimal que utiliza solamente ceros y unos. Probar que S es equipotente con el conjunto de sucesiones de ceros y unos $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

    b) Probar que $\mathbb{R}$ es equipotente con $[0,1]$.

    c) Probar que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

    d) Probar que los dos conjuntos anteriores son equipotentes con $\mathbb{R}$. Esto combinado con las partes anteriores nos dice que S es equipotente con $\mathbb{R}$ a pesar de ser un subconjunto en apariencia despreciable.

Ejercicios Complementarios

11. **El hotel de Hilbert[1]:** *Un viajero llega a un hotel de infinitas habitaciones númeradas con los números naturales a partir de* 1. *Al dirigirse a la recepción para pedir una habitación le informan que el hotel está lleno. Entonces el viajero propone una solución: le pide al conserje que reubique a los huéspedes cambiando al de la habitación* 1 *a la habitación* 2, *al de la habitación* 2 *a la habitación* 3 *y en general a quien ocupa la habitación* n *a la habitación* $n+1$. *De esta forma quedaría la habitación* 1 *lista para hacer ocupada por el viajero.*

    (a) Reinterpretar este ejemplo en términos de conjntos infinitos y equipotencia.

    (b) Usar la parte anterior para dar una definición alternativa de conjunto infinito.

12. Probar que todo conjunto numerable admite un buen orden.

13. Sea $\mathcal{X}$ una colección de conjuntos. Probar que la equipotencia define una relación de equivalencia en $\mathcal{X}$. Describir su cociente en el caso de que los elementos de $\mathcal{X}$ sean conjuntos finitos.

[1] Este ejemplo se le atribuye al matemático prusiano David Hilbert, quién caualmente nació en Königsbert, la ciudad de los puentes.