Hoy física cuántica: Frases de Erwin Schrödinger

La desintegración de un solo átomo radiactivo es observable (emite un proyectil que produce un centelleo visible en una pantalla fluorescente). Pero, dado un átomo radiactivo individual, la probable longitud de su vida es mucho más incierta que la de un gorrión sano. En efecto, no puede decirse nada más que esto: mientras vive (y esto puede ser durante miles de años) la probabilidad, sea grande o pequeña, de estallar en el próximo instante, permanece la misma. Esta patente falta de determinación individual ocasiona, sin embargo, la ley exponencial exacta de desintegración de un gran número de átomos radiactivos del mismo tipo.

Probabilidad - Clase 18
Variables aleatorias continuas (II)

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Variables aleatorias y función de distribución (repaso)

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad.
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria*.
- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ es un suceso
- $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida como

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

es la función de distribución de X.

Variables aleatorias continuas (Repaso)

Cuando existe una función $p(u)$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du, \qquad \text{para todo } x \text{ real} \tag{1}$$

se dice que

- X es (absolutamente) continua
- $p(x)$ es la *densidad* de X.

Propiedades de p y F en el caso continuo

- $p(u)$ es una función no negativa, y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$.
- $F(x)$ es continua en todos los puntos
- Si p es continua en x, entonces F es derivable en x y vale

$$F'(x) = p(x)$$

- En nuestro curso asumimos que $p(x)$ es continua salvo en una cantidad finita de puntos.[1]

[1] Existen casos mas complicados.

Ejemplos (resumen)

- U tiene distribución uniforme en $[0, 1]$
- $X = a + (b - a)U$ tiene distribución uniforme en $[a, b]$
- $Y = -\frac{1}{\alpha} \log U$ tiene distribución exponencial de parámetro α
- $V = -\frac{\pi}{2} + \pi U$ tiene distribución uniforme en $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$
- $\tan V$ tiene distribución de Cauchy ($p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$).

Simulación: método de la distribución inversa

Lema Sea X una v.a. con distribución F, que es continua biyectiva. Sea U una variable uniforme en $[0, 1]$. Entonces, la v.a.

$$Y = F^{-1}(U)$$

tiene distribución F (como X)

Demostración.

$$\mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbf{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

Esto nos da un método para simular v.a., cuando se pueda obtener la distribución de X. Si la F no es biyectiva, se define

$$F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\},$$

y el mismo lema funciona.

Simulación de una v.a. finita

Supongamos que X toma los valores $x_1, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, \ldots, p_n$. Dada U uniforme en $[0, 1]$, simulamos U y asignamos

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{cuando} \quad U \in [0, p_1] \\ x_2, & \text{cuando} \quad U \in [p_1, p_1 + p_2] \\ \vdots & \\ x_n, & \text{cuando} \quad U \in [p_1 + \cdots + p_{n-1}, 1] \end{cases}$$

Ejercicio Demostrar que X tiene la distribución discreta mencionada.

Pérdida de memoria

La variable exponencial T tiene una propiedad notable:

$$\mathbf{P}(T > t + h \,|\, T > t) = \mathbf{P}(T > h).$$

Prueba. Recordemos que $\mathbf{P}(T > h) = e^{-\alpha h}$. Tenemos

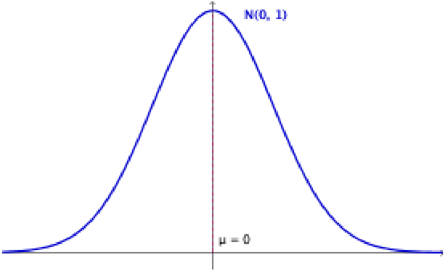
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T > t + h \,|\, T > t) &= \frac{\mathbf{P}(T > t + h \cap T > t)}{\mathbf{P}(T > t)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(T > t + h)}{\mathbf{P}(T > t)} = \frac{e^{-\alpha(t+h)}}{e^{-\alpha t}} = e^{-\alpha h} \\
&= \mathbf{P}(T > h).
\end{aligned}$$

Distribución normal estándar

Ejemplo

X tiene *distribución normal estándar* si tiene densidad dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \text{ para } x \text{ real.} \tag{2}$$



Lema. La función $\varphi(x)$ es una densidad, es decir

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right)^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

Ahora cambiamos a polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Tenemos

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad dxdy = \rho \, d\rho d\theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho \, d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho \, d\rho \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho \, d\rho = \left[-e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \right]_0^{\infty} = -(-1) = 1.
\end{aligned}$$

Distribución normal con parámetros[2] (a, σ^2)

Sea Z una v.a. con distribución normal estándar. Escribimos

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, la variable aleatoria

$$X = a + \sigma Z$$

tiene distribución normal con parámetros (a, σ^2).
Veamos su densidad

[2] Cuidado: en R se usa a y σ

$$F_{a,\sigma^2}(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(a + \sigma Z \leq x)$$
$$= \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{x-a}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)dt$$

Ahora cambiamos de variable:

$$u = a + t\sigma, \qquad t = \frac{u-a}{\sigma}, \qquad dt = \frac{1}{\sigma}du.$$

El cambio de límites es

t	u
$-\infty$	$-\infty$
$\frac{x-a}{\sigma}$	x

Entonces

$$F_{a,\sigma^2}(x) = \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{x-a}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{u-a}{\sigma}\right) du.$$

La densidad entones es

$$p_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

El caso particular en el que $a = 0$ y $\sigma = 1$ corresponde a la denominada distribución normal estándar
En R, los comandos de estas funciones son:

- `dnorm(x, mean = 0, sd = 1)` nos da $\varphi(x)$
- `pnorm(x, mean =` a`, sd =` σ`)` nos da $\Phi(x)$
- `qnorm(p, mean =` a`, sd =` σ`)` nos da x tal que $\Phi(x) = p$ (función inversa)
- `rnorm(N, mean =` a`, sd =` σ`)` simula N valores que tienen distribución $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Como casos particulares, si X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros (a, σ), se obtienen las siguientes probabilidades, que aparecen usualmente en aplicaciones estadísticas:

$$\mathbf{P}(a - \sigma \leq X \leq a + \sigma) = 0{,}68$$
$$\mathbf{P}(a - 1{,}96\sigma \leq X \leq a + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$$
$$\mathbf{P}(a - 3\sigma \leq X \leq a + 3\sigma) = 0{,}997$$

Las últimas dos fórmulas se conocen como las reglas de dos sigma, y regla de tres sigma.

Hasta el momento hemos considerado únicamente variables aleatorias con distribuciones de dos tipos: discretas y absolutamente continuas. Estos tipos no agotan todas las posibilidades. Por ejemplo, una variable aleatoria X con función de distribución que tenga derivada

$$(\pi(1+x^2))^{-1} \text{ para } x \leq 0,$$

y que tome en la semirrecta positiva únicamente los valores 1 y 2 con probabilidad $1/4$ en cada uno,

tiene una distribución que no resulta ser ni discreta, ni absolutamente continua.

Existe además una tercer clase de distribuciones, denominadas *distribuciones singulares*. Una función de distribución singular $F(x)$ es continua para todo x, y verifica $F'(x) = 0$ casi seguramente, con respecto a la medida de Lebesgue[3].

[3] Una distribución de este tipo es la dada por la *función de Cantor*.

Vectores aleatorios

- Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- El vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ se denomina *vector aleatorio*,
- Este vector toma valores en $\mathbb{R}^n$, es decur
$$X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n.$$
- En el caso particular $n = 1$, que llamamos *unidimensional*, obtenemos una variable aleatoria.
- Como el conjunto $\{\omega \colon X_k(\omega) \le x_k\}$ es un suceso (es decir, pertenece a $\mathcal{A}$) para cada $k = 1, \dots, n$ y reales $x_1, \dots, x_k$ arbitrarios, tenemos que
$$\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \colon X_k(\omega) \le x_k\} \in \mathcal{A},$$

- Se puede definir la función real de n variables

$$F(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\colon X_k(\omega)\le x_k\}\Big),$$

  que se denomina *función de distribución n–dimensional* del vector aleatorio X.

- La probabilidad recién considerada se designa también $\mathbf{P}(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n)$.

- Luego,

$$F(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{P}(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n). \tag{3}$$

- Para $n = 1$ la definición en dada coincide con la definición de distribución de una variable aleatoria.

Propiedades de la distribución de un vector aleatorios

Una función de distribución $F(x_1, \ldots, x_n)$ cumple las siguientes propiedades.

Propiedad

Se verifica $0 \leq F(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$*, para todo* $x_1, \ldots, x_n$*.*

Propiedad

La función $F(x_1, \ldots, x_n)$ *es no decreciente en cada uno de sus argumentos.*

Propiedad

Se tiene

$$\lim_{x_n \to +\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_{n-1} \leq x_{n-1}),$$
$$\lim_{x_n \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

- La propiedad 1 es evidente.
- Las demostraciones de las propiedades 2 y 3 son análogas a las correspondientes al caso de variables aleatorias ($n = 1$).
- Como en el caso unidimensional, los dos tipos más importantes de distribuciones n–dimensionales son las discretas y las absolutamente continuas.

Un problema de despedida:

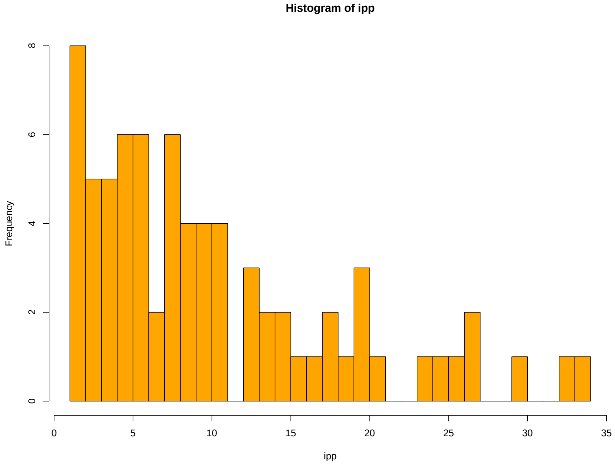


Figura: ¿Problema: que v.a. usamos?