“El día llegará en que el pensamiento estadístico será tan necesario para ejercer la ciudadanía con eficiencia, como la capacidad de leer y escribir”

Herbert George Wells, Escritor inglés (1866 - 1946)

Probabilidad - Clase 19
Vectores aleatorios

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Vectores aleatorios

- Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- El vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ se denomina *vector aleatorio*,
- Este vector toma valores en $\mathbb{R}^n$, es decur
$$X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n.$$
- En el caso particular $n = 1$, que llamamos *unidimensional*, obtenemos una variable aleatoria.
- Como el conjunto $\{\omega \colon X_k(\omega) \leq x_k\}$ es un suceso (es decir, pertenece a $\mathcal{A}$) para cada $k = 1, \dots, n$ y reales $x_1, \dots, x_k$ arbitrarios, tenemos que
$$\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \colon X_k(\omega) \leq x_k\} \in \mathcal{A},$$

- Se puede definir la función real de n variables

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \colon X_k(\omega) \leq x_k\}\Big),$$

  que se denomina *función de distribución n–dimensional* del vector aleatorio X.

- La probabilidad recién considerada se designa también

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

- Luego,

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n). \tag{1}$$

- Para $n = 1$ la definición en dada coincide con la definición de distribución de una variable aleatoria.

Propiedades de la distribución de un vector aleatorios

Una función de distribución $F(x_1, \ldots, x_n)$ cumple las siguientes propiedades.

Propiedad

Se verifica $0 \leq F(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$, *para todo* $x_1, \ldots, x_n$.

Propiedad

La función $F(x_1, \ldots, x_n)$ *es no decreciente en cada uno de sus argumentos.*

Propiedad

Se tiene

$$\lim_{x_n \to +\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_{n-1} \leq x_{n-1}),$$

$$\lim_{x_n \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

- La propiedad 1 es evidente.
- Las demostraciones de las propiedades 2 y 3 son análogas a las correspondientes al caso de variables aleatorias ($n = 1$).
- Como en el caso unidimensional, los dos tipos más importantes de distribuciones n–dimensionales son las discretas y las absolutamente continuas.

Distribuciones multidimensionales discretas y continuas

- Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ tiene *distribución discreta* si existe un conjunto B en $\mathbb{R}^n$, finito o numerable, tal que $\mathbf{P}(X \in B) = 1$.

- El vector aleatorio X tiene distribución *absolutamente continua*, cuando su función de distribución $F(x_1, \dots, x_n)$ puede representarse de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n \quad (2)$$

  para reales $x_1, \dots, x_n$ arbitrarios, donde la función $p(u_1, \dots, u_n)$ es no negativa e integrable,

- La función $p(u_1, \dots, u_n)$ se denomina *densidad del vector aleatorio* X.

Como en el caso unidimensional, tiene lugar la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n = 1. \tag{3}$$

Para $n = 1$ ambas definiciones se reducen a las de variables aleatorias.

Distribución multinomial.

Ejemplo. Consideremos n números positivos $p_1, \dots, p_n$, tales que $p_1 + \cdots + p_n = 1$, y un natural $N \geq 2$. El vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ tiene *distribución multinomial*, con parámetros $(N, p_1, \dots, p_n)$, si

$$\mathbf{P}(X_1 = m_1, \dots, X_n = m_n) = \frac{N!}{m_1! \cdots m_n!} p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n},$$

para todos los posibles $m_k = 0, \dots, N$ ($k = 1, \dots, n$), que verifican $m_1 + \cdots + m_n = N$.

Si $N = 2$ obtienemos la distribución binomial con parámetros (n, p_1),

Aplicación

Los grageas M&M vienen en 6 colores:
rojo, anaranjado, amarillo, verde, marrón, y azul, conteniendo 54 grageas por paquete. Los paquetes se producen al azar, de una gran cantidad, con iguales proporciones. Cuál es la probabilidad de que en un paquete todos los colores tengan la misma cantidad de grageas.

Solución

Tenemos

$$n = 6, \qquad p_i = \frac{1}{6} \quad (i = 1, \dots, 6), \qquad N = 54.$$

Queremos calcular la probabilidad de que

$$(X_1, \dots, X_6) = (9, 9, 9, 9, 9, 9).$$

La fórmula es

$$\mathbf{P}(X_1 = m_1, \dots, X_n = m_n) = \frac{N!}{m_1! \cdots m_n!} p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n},$$

Entonces

$$\mathbf{P}(X_1 = 9, \dots, X_6 = 9) = \frac{54!}{(9!)^6} \left(\frac{1}{6}\right)^{54} = 9.651 \times 10^{-5}.$$

Es decir: ¡imposible!

Distribución uniforme

Ejemplo. Decimos que el vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tiene *distribución uniforme* en una región **D** del espacio $\mathbb{R}^n$, si tiene densidad dada por

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} c, & \text{si } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{D}, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante positiva, que se determina mediante la condición (3).

Distribución uniforme en el hiper-cubo

De particular interés es el caso $\mathbf{D} = [0,1]^n$

Ejemplo. Decimos que el vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tiene *distribución uniforme* en el hiper-cubo $[0,1]^n$ del espacio $\mathbb{R}^n$, si tiene densidad dada por

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para } i = 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observación: El comando `runif(n)` nos da un punto con distribución uniforme en $[0,1]^n$.

Distribución normal n dimensional

Decimos que el vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tiene *distribución normal n–dimensional* si tiene densidad dada por

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(B)}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)'} \tag{4}$$

donde

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ son vectores fila de números reales;
- B es una matriz de dimensión $n \times n$, definida positiva[1],
- no singular y simétrica, B^{-1} es la matriz inversa de la matriz B,
- x' denota el vector traspuesto de x.

[1] Una matriz $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times n$ es *definida positiva*, si para todo vector fila $x = (x_1, \ldots, x_n)$ no nulo, se verifica $xBx' = \sum_{i,j} x_i b_{ij} x_j > 0$.

Casos $n = 1, 2$

En el caso $n = 1$, esta densidad se reduce a la fórmula de la densidad normal, donde el "vector" a es el número a, y la matriz de dimensión 1×1 es $B = [\sigma^2]$.

Caso bidimensional. Consideremos un vector aleatorio (X, Y) con *distribución normal bidimensional* [2]. No es difícil de verificar que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

verifica las tres condiciones indicadas, si $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, y $-1 < \rho < 1$.

[2] Decimos *bidimensional* en vez de 2–dimensional.

Veamos esto:

- Es claramente simétrica
- $$\det(B) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0.$$
- Los valores propios tienen el mismo signo:
$$\lambda_1\lambda_2 = \det(B) > 0$$
- Y su suma es positiva
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{traza}(B) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0$$

Luego ambos valores propios son positivos y la matriz es definida positiva.

Si $a = (a_1, a_2)$, y sustituimos la matriz B dada en (5) en la densidad, obtenemos,

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-a_1)}{\sigma_1}\frac{(y-a_2)}{\sigma_2}\right]\right\}. \tag{6}$$

Distribución marginal

Dado un vector X, cada coordenada X_i tiene una distribución que se llama *marginal*.
Demostremos que para el vector (X, Y) normal bidimensional, X tiene distribución normal con parámetros (a_1, σ_1): [3] Tenemos

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v) du dv$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} p(u, v) dv \Big) du. \tag{7}$$

Para calcular la integral con respecto de v, introducimos el cambio de variable

$$t = \big((v - a_2)/\sigma_2 - \rho(u - a_1)/\sigma_1\big)/\sqrt{1 - \rho^2}.$$

[3] Luego Y tiene distribución normal con parámetros (a_2, σ_2).

Calculando t^2 y sustituyendo en el exponente en la densidad, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(u,v)dv &= \frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t^2/2+(u-a_1)^2/(2\sigma_1^2)\right)}dt\\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(u-a_1)^2/(2\sigma_1^2)},\end{aligned}$$

donde utilizamos que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}$.

Sustituyendo esta expresión, resulta

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-a_1)^2/(2\sigma_1^2)} du,$$

es decir, la variable aleatoria X tiene distribución normal con parámetros (a_1, σ_1).
La afirmación relativa a Y se demuestra en forma análoga.

Vector normal estándar

Un caso importante es cuando

$$a = 0, \qquad B = Id_n.$$

En este caso

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(B)}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)'} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}xx'} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i).
\end{aligned}$$

Figura: (para hacer un test de hipótesis)