Facultad de Ciencias.
Centro de Matemática.
Anillos y módulos 2025

Parcial 1

1. Probar que si A es (conmutativo) noetheriano e I es un ideal de A, entonces $\frac{A}{I}$ también lo es.

2. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y consideremos

$$A = \{f \in \Bbbk[x] \,|\, \text{el coeficiente de grado 1 en } f \text{ es cero}\} \subseteq \Bbbk[x].$$

   a) Probar que x^2 es irreducible y no es primo en A.

   b) Probar que existe un morfismo de anillos $\varphi : \Bbbk[y, z] \to A$ que es sobreyectivo.

   c) Deducir que A es un dominio noetheriano que no es de factorización única.

3. Sean $S \subset \mathbb{Z}$ el subconjunto (multiplicativo) de los enteros que no son múltiplos de 2 ni de 3 y $A = S^{-1}\mathbb{Z}$ el anillo de fracciones de $\mathbb{Z}$ con denominadores en S.

   a) Describir los elementos invertibles de A.

   b) Observar que todo elemento de A se escribe de manera única como $\frac{as}{t}$ tales que $mcd(s, t) = 1$ y a no es múltiplo de ningún elemento de $S - \{1\}$.

   c) Definimos la función $\delta : A \setminus \{0\}\} \to \mathbb{N}$ como $\delta(\frac{as}{t}) = |a|$ si $s, t \in S$ son coprimos positivos y $a \in \mathbb{Z}$ no es múltiplo de ningún elemento de $S - \{1\}$. Probar que:

      1) para cualesquiera $r \in \mathbb{Z}, s, t \in S$ se tiene $\delta(\frac{rs}{t}) \leq |r|$,

      2) δ hace de A un dominio euclídeo.

   d) Probar que los ideales de A son de la forma $(2^n 3^m)$ para ciertos naturales n, m.

   e) Probar que A tiene exactamente dos ideales maximales.

   f) Probar que para cualquier natural $n \geq 1$, existe un dominio a ideales principales con exactamente n ideales maximales.