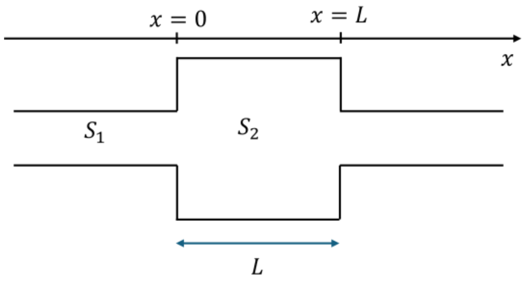

Ejercicio 1. Considere una onda que se propaga desde la izquierda en un tubo de bordes rígidos de sección transversal S_1. El tubo tiene un ensanchamiento de sección $S_2 = 5S_1$ y largo L como se muestra en la figura. En el límite de bajas frecuencias ($\lambda \gg S_1^{1/2};\ S_2^{1/2}$), el coeficiente de reflexión está dado por:

$$R = \frac{i(S_1/S_2 - S_2/S_1)\sin(kL)}{2\cos(kL) + i(S_1/S_2 + S_2/S_1)\sin(kL)}$$

(a) Hallar el coeficiente de transmisión en intensidad $T^{(I)}$. (b) Hallar las frecuencias para las cuales $T^{(I)} = 1$. (c) Mostrar que las frecuencias halladas en la parte anterior son independientes de la relación S_2/S_1.

(a) Sabemos que el coeficiente de transmisión en intensidad cumple:

$$T^{(I)} = 1 - R^{(I)}$$

$$R^{(I)} = |R|^2 = RR^*$$

Tenemos que $S_2/S_1 = 5$, por lo tanto:

$$R = \frac{i(1/5 - 5)\sin(kL)}{2\cos(kL) + i(1/5 + 5)\sin(kL)} = -\frac{12i\sin(kL)}{5\cos(kL) + 13i\sin(kL)}$$

$$\Rightarrow RR^* = \frac{144\sin^2(kL)}{25\cos^2(kL) + 169\sin^2(kL)} = \frac{144\tan^2(kL)}{25 + 169\tan^2(kL)}$$

$$\Rightarrow T^{(I)} = 1 - RR^* = \frac{25 + 25\tan^2(kL)}{25 + 169\tan^2(kL)}$$

(b) Para que la transmisión de intensidad hacia la rama derecha sea del 100% debe cumplirse $RR^* = 0$ y por lo tanto $\tan(kL) = 0$. Esta condición se cumple si:

$$kL = n\pi \Rightarrow \omega = ck = n\frac{c\pi}{L}$$

(c) Si la relación S_2/S_1 es arbitraria tenemos:

$$RR^* = \frac{(S_1/S_2 - S_2/S_1)^2\tan^2(kL)}{4 + (S_1/S_2 + S_2/S_1)^2\tan^2(kL)}$$

A partir de esta expresión vemos que la condición $RR^* = 0$ es la misma que la hallada en la parte (b).

Ejercicio 2. La superficie de un pistón plano de radio a vibra con frecuencia angular ω operando en un fluido de densidad ρ_0 y velocidad del sonido c. (a) Si la intensidad media sobre el eje del pistón a una distancia r_0 en campo lejano tiene un valor I_1, hallar la velocidad cuadrática media U_{rms} de la vibración del pistón. (b) Si la frecuencia de vibración se duplica, manteniendo el valor de U_{rms} hallado en la parte anterior, hallar el cambio en intensidad en r_0, expresado en dB relativo a la intensidad I_1. (c) Si $a = 1{,}0$ m, $\omega = 4000\pi$ rad/s y $c = 1500$ m/s, hallar la posición angular del primer nodo de radiación.

(a) La expresión para el campo de presión acústica en la aproximación de campo lejano está dada por:

$$P' = \frac{i\omega\rho_0 Q_s}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \left[\frac{2J_1(ka\sin(\theta))}{ka\sin(\theta)}\right]$$

donde $Q_s = U_0\pi a^2$ es el poder de la fuente. La intensidad media en campo lejano queda dada por:

$$\langle I(r)\rangle = \frac{P'P'^*}{2\rho_0 c}$$

En el eje del pistón tenemos:

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{2J_1(ka\sin(\theta))}{ka\sin(\theta)} = 1$$

De manera que:

$$\langle I(r_0)\rangle = \frac{\omega^2\rho_0^2(U_0\pi a^2)^2}{16\pi^2 r_0^2}\frac{1}{2\rho_0 c} = I_1$$

$$\Rightarrow U_0^2 = \frac{32 r_0^2 c I_1}{\omega^2\rho_0 a^4}$$

Finalmente llegamos a:

$$U_{rms} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{\frac{cI_1}{\rho_0}}\frac{r_0}{\omega a^2}$$

(b)Si cambiamos la frecuencia manteniendo el valor de U_{rms} entonces se debe modificar el valor de intensidad a I_2de manera que:

$$4\sqrt{\frac{cI_2}{\rho_0}}\frac{r_0}{2\omega a^2} = 4\sqrt{\frac{cI_1}{\rho_0}}\frac{r_0}{\omega a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{I_2}}{2} = \sqrt{I_1} \Rightarrow I_2 = 4I_1$$

De manera que el cambio en dB relativo a I_1 está dado por:

$$NI = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10\log_{10}(4) \cong 6{,}02\ dB$$

Es decir, la intensidad aumenta en 6,02 dB comparada con la intensidad anterior.

(c) El primer nodo de radiación ocurre cuando $J_1(ka\sin(\theta)) = 0 \Rightarrow ka\sin(\theta) = j_{11}$. De manera que:

$$\sin(\theta) = \frac{j_{11}}{ka}$$

Tenemos:

$$\omega = 4000\pi \frac{rad}{s}; c = 1500 \frac{m}{s}; a = 1,0\ m \ \Rightarrow ka = \frac{\omega a}{c} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{3j_{11}}{8\pi} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{3j_{11}}{8\pi}\right) \cong 27,2º$$

Ejercicio 3. Suponga que una cuerda se sujeta en uno de sus extremos (por ejemplo $x = 0$) a un oscilador armónico simple, el cual modela una situación de sujeción más realista que el borde libre o fijo. En este tipo de casos la condición de borde requiere que la impedancia mecánica del oscilador sea igual a la impedancia de onda de la cuerda en dicho punto. (a) Deducir, para $x = 0$, una expresión para la velocidad del movimiento transversal de la cuerda ($u = \partial y/\partial t$) en función de la impedancia mecánica del oscilador (Z_m). (b) A partir de la expresión anterior explicar los casos hipotéticos de la condición de borde rígido y la condición de borde libre. (c) Suponga ahora que la constante elástica del oscilador armónico es muy pequeña, por lo cual la impedancia mecánica en $x = 0$ queda determinada únicamente por la presencia de la masa del oscilador. En $x = L$ la cuerda está fija. Escriba las condiciones de borde para este caso. (d) Probar que los modos normales quedan determinados por la relación

$$\tan(kL) = \frac{|\vec{T}|k}{m\omega^2}$$

siendo $|\vec{T}|$ la tensión de la cuerda, k el número de onda, ω la frecuencia de oscilación de la cuerda y m la masa del oscilador.

(a) La impedancia mecánica del oscilador armónico está dada por:

$$Z_m = i(\omega m - \mathcal{s}/\omega)$$

donde $\mathcal{s}$ es la constante elástica del oscilador. Esta impedancia debe ser igual a la impedancia mecánica de la cuerda en $x = 0$:

$$\Rightarrow \frac{|\vec{T}|\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0}{u} = i(\omega m - \mathcal{s}/\omega)$$

De manera que:

$$u = -i|\vec{T}|\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0}{\omega m - \mathcal{s}/\omega}$$

(b) El borde rígido corresponde a una impedancia que tiende a infinito de manera que $u \cong 0$. Esta condición la podemos lograr de dos maneras:

En la expresión para u hallada en la parte anterior podemos dividir por c, la velocidad de la onda en la cuerda de manera de tener una cantidad adimensionada:

$$\frac{u}{c} = -i\frac{|\vec{T}|}{c}\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0}{\omega m - \mathcal{s}/\omega}$$

Queremos que $u/c \ll 1$. Una manera de lograrlo es:

$$\omega m \gg \frac{\mathcal{s}}{\omega}; \frac{|\vec{T}|}{c} = \rho c$$

Es decir, en el límite de altas frecuencias o una masa grande del oscilador de manera que la impedancia del oscilador esté dominada por la masa, equivale a un borde rígido. La otra forma es el límite

$$\frac{s}{\omega} \gg \omega m; \rho c$$

Es decir en el límite de bajas frecuencias o valores altos de la constante elástica del oscilador de manera que la impedancia del oscilador esté dominada por la elasticidad equivale a un borde rígido.

El borde libre equivale a una impedancia mecánica nula, es decir que debemos pedir que:

$$Z_m = i\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right) \ll 1$$

Esta condición se logra si la frecuencia de vibración es cercana a la frecuencia de resonancia del oscilador:

$$\omega \cong \sqrt{\frac{s}{m}}$$

(c) Ahora tenemos $\omega m \gg s/\omega$ pero no necesariamente $\omega m \gg \rho c$. De manera que la impedancia en $x = 0$ está dada por $Z_m \cong i\omega m$. Esta condición de borde la podemos expresar como:

$$u(x=0) = -i\frac{|\vec{T}|}{\omega m}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

El extremo en $x = L$ es fijo de manera que esta condición la expresamos como:

$$u(x=L) = 0$$

(d) Suponemos soluciones armónicas de la forma:

$$y(x,t) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$

donde hemos eliminado la dependencia temporal en la escritura porque aparece como factor común en todos los términos. De la segunda condición de borde obtenemos:

$$B = -Ae^{-2ikL}$$

De manera que:

$$y(x,t) = A[e^{-ikx} - e^{-2ikL}e^{ikx}]$$

Para la primera condición de borde, las derivadas temporal y espacial quedan:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 = i\omega A[1 - e^{-2ikL}]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = -ikA[1 + e^{-2ikL}]$$

Entonces:

$$i\omega A[1 - e^{-2ikL}] = -kA\frac{|\vec{T}|}{\omega m}[1 + e^{-2ikL}]$$

$$\Rightarrow ie^{-ikL}[e^{ikL} - e^{-ikL}] = -\frac{k|\vec{T}|}{m\omega^2}\, e^{-ikL}[e^{ikL} + e^{-ikL}]$$

$$\Rightarrow -2\sin(kL) = -2\frac{k|\vec{T}|}{m\omega^2}\cos(kL)$$

Finalmente llegamos a:

$$\tan(kL) = \frac{k|\vec{T}|}{m\omega^2}$$