Justificación de la conservación del momento angular

Práctico 4: Leyes de Conservación. Ejercicio 7.

Iván Palavecino

Justificación de la conservación del momento angular

Densidad de momento angular del campo

La densidad de momento angular del campo electromagnético se define como

$$\mathbf{l}_{\text{em}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (1)$$

Ley de continuidad (conservación local)

La conservación local del momento angular en un sistema se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{l}_{\text{em}}}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}} = -\mathbf{r} \times \mathbf{f}_{\text{em}}, \quad (2)$$

donde

- $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ es el tensor de flujo de momento angular (que es la divergencia del producto vecotrial del tensor de tensiones de Maxwell con $\vec{r}$).
- $\mathbf{f}_{\text{em}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ es la densidad de fuerza de Lorentz.
- $\mathbf{r} \times \mathbf{f}_{\text{em}}$ es la densidad de *torque* que el campo ejerce sobre la materia. $\vec{r} \times \vec{f}_{\text{mec}} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \vec{p}_{\text{mec}}) \equiv \frac{\partial \vec{L}_{\text{mec}}}{\partial t}$

Integrando en un volumen V que contiene los cilindros,

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{l}_{\text{em}} dV + \int_{\partial V} \overleftrightarrow{\mathbf{M}} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_{\text{em}}) dV. \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_{\text{em}} + \vec{L}_{\text{mec}}) + \int_{S(v)} \overleftrightarrow{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (4)$$

Siendo el primer término la tasa de cambio del momento angular total del sistema, es decir la suma del Momento angular electromagnético (proveniente de los campos) y el mecánico (proveniente de las cargas en movimiento), y el segundo término la tasa de salida/entrada de momento angular por la superficie del volumen del sistema.

Régimen estacionario ($I = \text{constante}$)

1. $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$.
2. $\frac{\partial \mathbf{l}_{\text{em}}}{\partial t} = 0$ y no hay flujo neto de $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ en la superficie.
3. La densidad de fuerza $f_{em} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ en el solenoide es radial, por lo que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}.$$

4. No hay torques externos al sistema por lo que no hay flujo neto de $\mathbf{M}$ por la frontera (todo está estable).

De (4) se concluye que cada término es cero y por ende,

$$L_{\text{em}} = \int_V \mathbf{l}_{\text{em}} dV, \quad L_{\text{mec}} = \text{constantes}.$$

Transferencia campo $\rightarrow$ materia al variar $I(t)$

En la parte b, cuando $I(t)$ comienza a decrecer lentamente:

- Aparece un campo inducido

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{ind}} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

que es *tangencial* (dirección $\hat{\phi}$).

- Este $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ ejerce sobre la densidad de carga ρ de cada cilindro un torque interno de densidad

$$\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E}_{\text{ind}}) \neq \mathbf{0},$$

haciendo girar ambos cilindros en sentidos opuestos.

- La variación local del momento angular del campo,

$$\frac{\partial \mathbf{l}_{\text{em}}}{\partial t} = - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}} - \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E}_{\text{ind}} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}),$$

se integra sobre todo el espacio para mostrar que la pérdida de momento angular del campo coincide con la ganancia mecánica:

$$\Delta \mathbf{L}_{\text{em}} = - \int_V \frac{\partial \mathbf{l}_{\text{em}}}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E}_{\text{ind}}) dV = \Delta \mathbf{L}_{\text{mech}}.$$

Conclusión

- **Caso intensidad de corriente constante a):** No hay transferencia de momento angular entre campo y materia.
- **Caso intensidad de corriente variable (lentamente) b):** La variación de $I(t)$ induce $\mathbf{E}_{\text{ind}}$, que produce un torque local o interno $\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E}_{\text{ind}})$ sobre las cargas, transfiriendo de modo exacto el momento angular perdido por el campo al movimiento de los cilindros.

En general, esto ocurre porque no hay fuerzas externas que provoquen torques externos al sistema, por lo cuál los torques internos solo garantizan la conservación del momento angular mediante el campo eléctrico inducido. De este modo, la ley local de conservación de momento angular se mantiene

$$L_{\text{total}} = L_{\text{em}} + L_{\text{mec}}$$

donde L_{total} permanece constante en todo momento.