Justificación detallada de la conservación del momento angular en un sistema electromagnético

Pregunta central

¿Por qué se conserva el momento angular total del sistema en el problema planteado?

Análisis general del sistema

Consideramos un sistema idealizado compuesto por un solenoide largo alineado con el eje z y dos cilindros coaxiales: uno interior cargado positivamente y otro exterior con carga opuesta. En el estado inicial, el sistema está en reposo y el solenoide sostiene una corriente estacionaria que produce un campo magnético constante en su interior.

Este sistema no está aislado en un sentido absoluto, pero sí en un sentido físico relevante: **no existe ningún torque externo neto que actúe sobre él**. Es decir, las únicas fuerzas que intervienen son internas (ya sean mecánicas o electromagnéticas), y por lo tanto el momento angular total del sistema —que incluye tanto contribuciones mecánicas como de campo— debe conservarse.

Momento angular en campos electromagnéticos

En la electrodinámica clásica, el campo electromagnético posee densidad de momento lineal y de momento angular. La densidad de momento angular asociada al campo es

$$\mathbf{l}_{\text{em}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

Por tanto, el momento angular total del campo está dado por

$$\mathbf{L}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \, d^3r \tag{2}$$

Este momento angular no es una abstracción matemática: es **una cantidad física real** que puede ser transferida a la materia mediante la acción de las fuerzas de Lorentz.

Configuración inicial y momento angular del campo

Inicialmente, el solenoide genera un campo magnético uniforme en su interior, $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Los cilindros, al estar cargados con densidades superficiales opuestas, generan un campo eléctrico radial $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. El producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ apunta en la dirección azimutal $\hat{\phi}$, y por lo tanto el momento angular del campo —por el producto cruz con $\mathbf{r}$— está orientado a lo largo del eje z.

Importante: aunque no haya cuerpos en movimiento, el sistema ya posee momento angular almacenado en el campo debido a la configuración cruzada de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Este momento angular es puramente de campo, y es el que se calcula en la parte (a) del ejercicio.

Evolución temporal y transferencia de momento angular

Cuando la corriente en el solenoide disminuye lentamente, el campo magnético comienza a decaer. Según la ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

esto genera un campo eléctrico azimutal $\mathbf{E}_\phi$ no conservativo. Este campo inducido actúa sobre las cargas distribuidas en los cilindros, generando un **torque interno** que los hace rotar (como se analiza en las partes (b) y (c)).

Este campo inducido es la **única forma en que el momento angular puede ser transferido**, dado que los cilindros no están en contacto ni hay fuerzas mecánicas entre ellos. De este modo, el momento angular electromagnético se reduce mientras crece el momento angular mecánico de los cilindros.

Conservación del momento angular total

La ley general de conservación del momento angular en presencia de campos es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \tau_{\text{ext}} \tag{4}$$

En este sistema, $\tau_{\text{ext}} = 0$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5}$$

Inicialmente $\mathbf{L}_{\text{mec}} = 0$, y finalmente $\mathbf{L}_{\text{em}} = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{L}_{\text{mec}}^{(\text{final})} = \mathbf{L}_{\text{em}}^{(\text{inicial})}, \tag{6}$$

lo cual se confirma en los cálculos realizados en las partes (b) y (c). La relación entre las velocidades angulares y el valor de la constante k derivan directamente de imponer esta igualdad.

Fundamento físico profundo

Este análisis subraya que el campo electromagnético tiene existencia física y puede portar cantidades conservadas como energía y momento angular. Estas cantidades pueden ser transferidas a cuerpos materiales mediante interacciones internas, sin violar la conservación global.

La conservación observada es consecuencia de:

1. La simetría rotacional del sistema (conservación de L_z por el teorema de Noether).
2. La validez de las ecuaciones de Maxwell.
3. La inexistencia de torques externos.

El campo inducido genera un torque que no depende de fuerzas externas, sino del propio cambio del campo $\mathbf{B}$. La acción de este torque, como se muestra en la parte (c), permite calcular la constante k, cerrando así el ciclo de transferencia de momento angular desde el campo hacia los cilindros.

Conclusión

El momento angular total del sistema se conserva porque el sistema es cerrado y las únicas interacciones son internas. La variación del campo magnético induce un campo eléctrico que actúa sobre las cargas, transfiriendo momento angular del campo a los cilindros. El resultado final —cilindros rotando y campo nulo— valida que el momento angular inicial, calculado en (a), se ha conservado al convertirse en momento angular mecánico en (b) y (c).