Justificación ejercicio 4

En el problema planteado, se analiza una configuración compuesta por un solenoide largo y dos cilindros coaxiales cargados, uno en el interior del otro. Al inicio, los cilindros están en reposo, y el solenoide transporta una corriente constante que genera un campo magnético uniforme a lo largo de su eje. Como consecuencia de la presencia de cargas en los cilindros, existe también un campo eléctrico radial. Aunque ningún objeto está en movimiento inicialmente, el sistema contiene momento angular en su campo electromagnético debido a la combinación espacial de estos campos.

El momento angular total del campo es:

$$\vec{L}_{em} = \varepsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \, d^3r$$

Esta contribución es importante porque, aunque no haya cuerpos girando, el campo mismo almacena momento angular.

Cuando la corriente en el solenoide comienza a disminuir, el campo magnético que produce también varía con el tiempo. Esto genera un campo eléctrico azimutal inducido, de acuerdo con la Ley de Faraday. Dicho campo tiene la particularidad de no derivar de un potencial escalar, y su circulación no es nula.

Este campo inducido actúa sobre las cargas presentes en los cilindros, generando un torque que los pone en rotación. Dado que los cilindros no están acoplados mecánicamente ni reciben acción desde el exterior, esta es la única vía por la cual se puede generar movimiento rotacional en ellos.

La clave del problema radica en que no existen torques externos aplicados al sistema. Todas las fuerzas involucradas son internas: el campo inducido actúa dentro del sistema sobre las cargas que ya formaban parte de él.

Ademas, la disposición del sistema posee simetría en torno al eje z, lo cual implica que, el momento angular total en esa dirección debe mantenerse constante a lo largo del tiempo.
Por lo tanto, si en el estado inicial el momento angular estaba completamente contenido en el campo, y al final ese campo desaparece, debe haberse transferido íntegramente al movimiento mecánico de los cilindros:

$$\vec{L}_{i,tot} = \vec{L}_{em} \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{em} = \vec{L}_{mec}$$
$$\vec{L}_{f,tot} = \vec{L}_{mec}$$

Una vez que los cilindros entran en rotación, sus velocidades angulares son ω_a y ω_b.
Sus momentos de inercia con respecto al eje son:

$$I_a = m_a a^2 \quad ; \quad I_b = m_b b^2$$

$\omega_b = -k\omega_a \rightarrow$ giran en sentidos opuestos.
Entonces:

$$L_{mec} = I_a \omega_a + I_b \omega_b = m_a a^2 \omega_a - k m_b b^2 \omega_a = \omega_a (m_a a^2 - k m_b b^2)$$

Igualando esto al momento angular electromagnético obtenido en (a), se verifica la conservacón total.