Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2020

Práctico 7

En este repartido los grupos son finitos.

1. Hallar los 2-subgrupos de Sylow y los 3-subgrupos de Sylow de los grupos de permutaciones $\mathcal{S}_n$ para $n = 3, 4, 5$.

2. Sea H un p-subgrupo normal de un grupo finito G. Probar que H está contenido en todos los p-subgrupos de Sylow de G.

3. Sea G un grupo y p un número primo fijo. Probar que la intersección de todos los p-subgrupos de Sylow de G es un subgrupo normal.

4. Sea G un grupo y H un subgrupo. Probar que cada p-subgrupo de Sylow de H está contenido en un p-subgrupo de Sylow de G, y que dos p-subgrupos de Sylow diferentes de H no están contenidos en un mismo p-subgrupo de Sylow de G.

5. Probar que en un grupo simple de orden 168 hay 48 elementos de orden 7.

6. Sea G un grupo de orden rp^n, p primo y $r < p$. Probar que G tiene un único p-subgrupo de Sylow.

7. Probar que si G es un grupo de orden 12, entonces G contiene un subgrupo de Sylow normal.
   Sugerencia: si existe $H < G$ tal que $|H| = 3$ y $H \ntriangleleft G$, entonces probar que la acción natural de G en G/H induce un isomorfismo $G \simeq A_4$.

8. Sea G un grupo tiene orden p^2q, con $p \neq q$ primos. Probar que G tiene un subgrupo de Sylow normal.
   Sugerencia: discutir según $p > q$ o $p < q$.

9. Probar que si G es un grupo de orden 56, entonces G contiene un subgrupo de Sylow normal.

10. Probar que no hay grupos simples de orden 36.

11. Sea G un grupo simple de orden 60. Probaremos que G es isomorfo al grupo alternado A_5.
    a) Hallar la cantidad de 3-subgrupos de Sylow y de 5-subgrupos de Sylow de G. ¿Cuántos elementos de orden 3 y de orden 5 hay en G?
    b) Probar que la cantidad n_2 de 2-subgrupos de Sylow de G es 5 o 15. En las partes c) y d) siguientes probaremos que en cualquiera de estos casos G contiene un subgrupo de orden 12.
    c) Supongamos que $n_2 = 5$. Probar que si S es un 2-subgrupo de Sylow de G, entonces $|N_G(S)| = 12$.
    d) Supongamos que $n_2 = 15$. Probar.
        1) Existen dos 2-subgrupos de Sylow H y K tales que $H \cap K \neq \{1\}$.
        2) $H \cap K$ es un subgrupo normal de $H \vee K$. *Sugerencia:* notar que si un grupo F está generado por un conjunto S y $N < F$, entonces $N \triangleleft F$ si y solo si $sNs^{-1} \subset N$, para todo $s \in S$.
        3) El orden de $H \vee K$ es 12.
    e) Sea L un subgrupo de G de orden 12. Probar que la acción natural de G en G/L induce un morfismo inyectivo $\phi : G \to \mathcal{S}_5$ Deducir que G es isomorfo a A_5.

12. Probar que un grupo simple de orden menor que 60 tiene orden primo (es decir, el grupo alternado A_5 es el primer grupo simple cuyo orden no es primo).