Práctico 1: Trigonometría Esférica

1. Para medir el radio de la Tierra, Eratóstenes usó en el Siglo III AC un método trigonométrico combinado con observaciones. Se sabía que en la ciudad de Siena (actual Asuán en Egipto) ubicada en las coordenadas geográficas $(\phi, \lambda) = (24°05'N, 32°54'E)$ el día, del solsticio de verano una vara vertical no proyecta sombra al medio día mientras que al mismo tiempo en la ciudad de Alejandría ubicada en $(\phi, \lambda) = (31°12'N, 29°55'E)$ una vara de 1 m de longitud proyectaba una sombra de 12,63 cm. Si en ese entonces se estimaba que la distancia entre Siena y Alejandría era de 924 km:

   (a) ¿Cuál fue el radio de la Tierra calculado por Eratóstenes?
   (b) ¿Qué hipótesis empleó para resolver este problema? ¿Son aproximaciones razonables?

   Respuesta: (a) 7357 km

2. Dos barcos X e Y están navegando siguiendo los paralelos de latitudes $\phi = 48°N$ y $\phi = 15°S$ respectivamente, de tal manera que en todo instante los dos barcos están sobre un mismo meridiano terrestre. Si la velocidad del barco X es 35 km/h ¿cuál es la velocidad del barco Y?.

   Respuesta: 50,52 km/h

3. Si A y B son dos lugares en la superficie de la Tierra con la misma latitud ϕ y la diferencia de sus longitudes geográficas es $2l$, demuestre que:

   (a) La mayor latitud alcanzada por el círculo máximo que pasa por A y B es $\phi_M = \arctan(\tan\phi \sec l)$
   (b) La diferencia Δ_{AB} entre la distancia medida a lo largo del paralelo de latitud ϕ entre A y B y la distancia AB tomada sobre el círculo máximo viene dada por:

   $$\Delta_{AB} = 2R[l\cos\phi - \arcsin(\sin l \cos\phi)]$$

   donde R es el radio de la Tierra.

4. Considere tres paralelos terrestres ubicados en las latitudes $\phi_1 = 0°$, $\phi_2 = 45°$ y $\phi_3 = 80°$. Sobre el paralelo ubicado en ϕ_1 se distribuyen 100 puntos de manera que su densidad lineal sea homogénea, es decir, de manera que la distancia entre puntos consecutivos sea siempre la misma. Considerando la aproximación de la Tierra esférica:

   a) ¿Cuál es la diferencia en longitud geográfica entre puntos consecutivos?
   b) ¿Cuál es la longitud del arco que separa a los puntos consecutivos?
   c) ¿Cuántos puntos y a qué diferencia de longitud geográfica se debería ubicar para que en el paralelo ϕ_2 la densidad lineal sea aproximadamente igual a la obtenida para el paralelo ϕ_1?
   d) Responda las mismas preguntas del item anterior para el caso del paralelo ϕ_3

5. La máxima latitud Sur alcanzada por un círculo máximo que une un punto A sobre el ecuador con un punto B en latitud Sur ϕ es ϕ_1. Pruebe que la diferencia de longitud entre A y B es $90° + \arccos(\tan\phi \cot\phi_1)$.

6. Considere 2 observadores A y B localizados sobre la superficie terrestre en las coordenadas (ϕ_A, λ_A) y (ϕ_B, λ_B). Si el observador B realiza un pequeño desplazamiento $\Delta\phi_B$ a lo largo de un meridiano, probar que la distancia AB a lo largo de un circulo máximo varía en:

$$\Delta(AB) = \frac{\Delta\phi_B\Big[\sin\phi_B\cos\phi_A\cos(\lambda_B - \lambda_A) - \sin\phi_A\cos\phi_B\Big]}{\sin(AB)}$$

7. Un avión parte de la ciudad de Lima ubicada en $(\phi, \lambda) = (12°10'S, 77°5'W)$ y vuela directamente hacia la ciudad de Roma ubicada en $(\phi, \lambda) = (41°53'N,\, 12°33'E)$.

   (a) Calcule la distancia total recorrida en km

   (b) La longitud geográfica en la que el avión cruza el ecuador terrestre.

   Respuestas: (a) $\widehat{LR} = 10.877$ km (b) $\lambda = 63°35'\ W$

8. Viaje a Sydney. Desplazándonos por la superficie de la Tierra nos proponemos llegar a la ciudad de Sydney $(\phi, \lambda) = (-34°, +151°)$ partiendo desde Montevideo $(\phi, \lambda) = (-35°, -56°)$ y siguiendo el arco de circulo máximo de mínima longitud.

   a) Suponiendo la Tierra esférica hallar el azimut (medido en el sentido N-O-S-E) de la dirección hacia donde debemos comenzar el recorrido.

   b) Calcular la longitud del arco de círculo máximo recorrido expresado en radios terrestres.

   Respuestas: (a) $A = 156°53'$ (b) $\widehat{MS} = 1,86 R_T$

9. Dar argumentos geométricos para mostrar que:

   a) Toda intersección de un plano con una esfera genera una circunferencia

   b) El arco de circulo máximo que une dos puntos es el camino más corto en la superficie de la esfera que conecta a ambos puntos

   c) Sean dos puntos A y B en un circulo máximo de una esfera de radio r y que forman el ángulo α en el plano del circulo máximo. La longitud del arco AB del circulo máximo viene dada por $AB = r\alpha$.

   d) Dados dos puntos en una esfera hay un único círculo máximo que los conecta.

   e) La longitud del arco de círculo máximo que conecta a dos puntos es su distancia mínima en la esfera.

   f) La conexión de tres puntos en una esfera mediante círculos máximos define un *único* triángulo esférico.

   g) La suma de los ángulos diedros a, b y c de un triángulo esférico cumple con $0 \leq a + b + c \leq 2\pi$.

   h) La suma de los ángulos A, B y C de un triángulo esférico cumple con $\pi \leq A + B + C \leq 3\pi$.

10. Considere un triángulo esférico de ángulos diedros A, B y C y lados a, b y c, respectivamente opuestos a cada ángulo diedro. A partir de la definición del producto vectorial demuestre el *Teorema del Seno para triángulos esféricos*:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

11. ¿Cuántas veces más grande es el área de la superficie terrestre encerrada entre los paralelos de latitud $\phi_1 = 30°$ y $\phi_2 = 40°$ que el área encerrada entre los paralelos de latitud $\phi_3 = 70°$ y $\phi_4 = 80°$?

    Respuesta: $A_{\phi_1\phi_2} = 3,165 A_{\phi_3\phi_4}$