Capítulo 3

Dependencia e independencia lineal

En este capítulo estudiaremos tres conceptos de gran importancia para el desarrollo del álgebra lineal: el concepto de conjunto generador, el concepto de conjunto linealmente independiente y el de base de un espacio vectorial.

En el Capítulo 2, dado un espacio vectorial V y un subconjunto arbitrario $X \subset V$, definimos el *subespacio de V generado por X*, que denotamos $\langle X \rangle$. Este subespacio $\langle X \rangle$ es el menor subespacio que contiene a X y se puede describir explícitamente como el conjunto de los vectores $v \in V$ de la forma $v = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ donde $x_1, \dots, x_n \in X$ y $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$; i.e., v es una *combinación lineal* finita de elementos de X.

En esa situación decimos que $\langle X \rangle$ está generado por X o que X genera $\langle X \rangle$.

Observemos que si $X \subset Y$ entonces $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$ y si X es un *subespacio* de V entonces $\langle X \rangle = X$.

Definición 3.1. Sea V un espacio vectorial cualquiera, decimos que $G \subset V$ genera V o que G es un conjunto *generador* de V si $\langle G \rangle = V$. Si está claro el espacio al que nos referimos diremos simplemente que G es un generador.

Ejemplo 3.2. (1) Recordemos que en $\Bbbk$ visto como espacio vectorial sobre sí mismo, los únicos subespacios son los triviales, $\{0\}$ y $\Bbbk$. Luego, todo conjunto que contenga un elemento no nulo es un generador de $\Bbbk$, ver Observación 2.25.

(2) Vimos que los subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$ son las rectas que pasan por el origen. Si ℓ es una tal recta y $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \ell$, entonces X genera a ℓ siempre y cuando exista i tal que $v_i \neq 0$.

Un conjunto que contenga dos vectores que no sean colineales con el origen genera todo el plano $\mathbb{R}^2$.

(3) Consideremos ahora el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Si ℓ es una recta que pasa por el origen, nuevamente un generador de ℓ está dado por un subconjunto $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \ell$, tal que existe i con $v_i \neq 0$. Observemos que alcanza con $v \in \ell \setminus \{0\}$ para generar el subespacio ℓ: $\langle v \rangle = \ell$.

El subespacio generado por dos vectores no colineales con el origen es el plano por el origen que los contiene.

Finalmente, si tomamos dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ no colineales con el origen y v_3 que no pertenezca al plano determinado por v_1, v_2 y el origen, entonces $\mathbb{R}^3$ está generado por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(4) En el espacio $\mathbb{R}^n$, el conjunto $G = \big\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\big\}$ genera $\mathbb{R}^n$.

El conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$, donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, con el 1 en la posición i, genera $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.3. (1) El conjunto formado por los monomios $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\} \subset \Bbbk[t]$ genera $\Bbbk[t]$. El conjunto $X = \{t, t^2, \dots, t^n, \dots\} \subset \Bbbk[t]$ no genera $\Bbbk[t]$. En efecto, el subespacio generado por X es el formado por los polinomios que se anulan en 0, y entonces $\langle X \rangle \subsetneq \Bbbk[t]$.

(2) Consideremos el subespacio $\Bbbk_n[t] = \{p \in \Bbbk[t] : \mathrm{gr}(p) \leq n\}$, donde $\mathrm{gr}(p)$ indica el grado del polinomio p. En ese caso los polinomios $\{1, t, \dots, t^n\}$ forman un conjunto que genera $\Bbbk_n[t]$.

(3) El conjunto $G' = \{1 - t, 2 + t, t\}$ es generador de $\Bbbk_1[t]$. También el conjunto $G = \{1 - t, t\}$ es generador de $\Bbbk_1[t]$.

En efecto, $\langle G' \rangle = \Bbbk_1[t]$ si y sólo si dado $a + bt \in \Bbbk_1[t]$, existen $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ tales que

$$a + bt = \alpha(1 - t) + \beta(2 + t) + \gamma t = (\alpha + 2\beta) + (-\alpha + \beta + \gamma)t,$$

lo que equivale a que la terna (α, β, γ) sea solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ -\alpha + \beta + \gamma = b \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Este sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, con solución $(a - 2\beta, \beta, a + b - 3\beta)$.

Análogamente, G es generador de $\Bbbk_1[t]$ si para todo $a, b \in \Bbbk$, existen $\alpha, \gamma \in \Bbbk$ tales que

$$a + bt = \alpha(1 - t) + \gamma t = \alpha + (-\alpha + \gamma)t,$$

lo que equivale a que (α, γ) sean solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha = a \\ -\alpha + \gamma = b \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Este sistema de ecuaciones es compatible determinado, con solución $(a, 0, a + b)$.

Observemos que el sistema de ecuaciones (3.0.2) se obtiene del sistema (3.0.1) evaluando en $\beta = 0$.

Ejemplo 3.4. Si G es un generador de V y $G \subset G'$, entonces G' es también un generador de V (ver el ejemplo anterior). El caso límite es cuando $G = V$, que es siempre un conjunto generador de V. Es evidente que si un *subespacio* G genera V, entonces $G = V$.

Como se verifica en los ejemplos 3.2, (3) y (4), un conjunto generador puede contener subconjuntos generadores más pequeños. Los conjuntos generadores minimales — es decir aquellos para los que ningún subconjunto propio también genera V — juegan un rol muy importante en la teoría. En esa dirección, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.5. *Sea V un $\Bbbk$–espacio, $X \subset V$ un subconjunto y $x_0 \in X$. Entonces, se cumple que $\langle X \setminus \{x_0\} \rangle = \langle X \rangle$ si y sólo si $x_0 \in \langle X \setminus \{x_0\} \rangle$.*

Demostración. Si $\langle X \setminus \{x_0\} \rangle = \langle X \rangle$, como $X \subset \langle X \rangle$, todo vector de X puede ponerse como combinación lineal de elementos de $X \setminus \{x_0\}$; en particular $x_0 \in \langle X \setminus \{x_0\} \rangle$.

Recíprocamente, si $x_0 \in \langle X \setminus \{x_0\} \rangle$, existen vectores $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{x_0\}$ y escalares $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$, tales que $x_0 = \sum a_i x_i$. Si v es un vector arbitrario de $\langle X \rangle$, entonces $v = a x_0 + \sum_1^m b_j y_j$, donde $y_1, \dots, y_m \in X$ son vectores de X, ninguno de los cuales coincide con x_0 (observar que $a, b_1, \dots, b_m \in \Bbbk$ pueden ser cero). Si sustituimos x_0 por $x_0 = \sum a_i x_i$ en la expresión de v tenemos que $v = \sum_1^n a a_i x_i + \sum_1^m b_j y_j$. Como, por la forma que fueron definidos, ninguno de los vectores $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m \in X$ coincide con x_0, concluimos que $X \setminus \{x_0\}$ genera V. $\square$

Observación 3.6. Un análisis más detallado de la prueba anterior (que es correcta) nos permite detectar un fenómeno que más adelante, cuando tratemos de probar otro tipo de resultados, sí deberemos tener en cuenta:

Nótese que en la prueba anterior lo único que se sabe acerca de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ es su pertenencia a $X \setminus \{x_0\}$. Si bien puede suponerse que que $x_i \neq x_j$ toda vez que $i \neq j$ y que $y_h \neq y_k$ toda vez que $h \neq k$, en principio pueden existir $i_0 \in [n]$ y $h_0 \in [m]$ tales que $x_{i_0} = y_{h_0}$. Como dijéramos al inicio de la Observación, esto no afecta la prueba del Lema 3.5, ya que lo único que se necesita es saber que todos los vectores x_i, y_h pertenecen a X.

Definición 3.7. (1) Un conjunto finito de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ se dice *linealmente independiente* si la única combinación lineal que da cero es aquella para la cual todos los a_i son cero; en otras palabras: de una igualdad del tipo $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, se deduce que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

(2) Sea ahora $X \subset V$ un subconjunto cualquiera. Decimos que X es *linealmente independiente* si todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ es linealmente independiente. En el Lema 3.11 (ver también Observación 3.12) probaremos que si X es un conjunto finito linealmente independiente, entonces todo subconjunto de X es linealmente independiente, por lo que esta definición coincide en el caso finito con la dada anteriormente.

(3) Un conjunto de vectores $X \subset V$ se dice que es *linealmente dependiente* si no es linealmente independiente. En otras palabras si se verifica una igualdad de la forma $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, donde $\{v_1, \dots, v_n\} \subset X$ y existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{i_0} \neq 0$. Observemos que estamos suponiendo que los vectores v_i son dos a dos distintos, es decir $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$.

Claramente un conjunto es linealmente dependiente si contiene un subconjunto finito linealmente dependiente.

(4) Al conjunto vacío $\emptyset$ lo consideramos como linealmente independiente.

Observación 3.8. Sean $x_1, \dots, x_n \in V$ vectores de V dos a dos distintos, y $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ escalares, tales que se verifica la igualdad

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0. \tag{3.0.3}$$

Si existe i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$, diremos que la igualdad 3.0.3 es una *relación de dependencia no trivial.*

Obsérvese que si $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces se verifica la igualdad: $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$.

Por otra parte, si $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ con, digamos $a_1 x_1 \neq 0$ (lo que es equivalente a pedir que $a_1 \neq 0$ y $x_1 \neq 0$), entonces algún otro sumando $a_i x_i$ también tendrá que ser no nulo.

Un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ es linealmente independiente si no presenta relaciones de dependencia no triviales y es linealmente dependiente si presenta alguna relación de dependencia no trivial.

EJEMPLO 3.9. (1) El conjunto $I = \{(1,2,3),(1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente.

Si $a(1,2,3) + b(1,-1,0) = (0,0,0)$ deducimos que $a + b = 0, 2a - b = 0, 3a = 0$, lo que implica que $a = b = 0$ o sea que la relación de dependencia de arriba es la trivial, i.e., I es linealmente independiente.

(2) El conjunto $D = \{(2,1,-1),(1,0,3),(0,1,-7)\} \subset \mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente porque $(2,1,-1) - 2(1,0,3) - (0,1,-7) = (0,0,0)$.

(3) El teorema de identidad de polinomios asegura que el conjunto $\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\} \subset \Bbbk[t]$ es linealmente independiente.

(4) Si $D \subset V$ es un subconjunto que contiene al vector $0 \in D$, entonces D es linealmente dependiente. En efecto $a0_V = 0$, con $a \neq 0$, es una relación de dependencia no trivial.

(5) Si $X = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset \Bbbk^n$ es un conjunto, con $v_i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$, para estudiar su independencia lineal planteamos la existencia de una relación de dependencia $a_1v_1 + \cdots + a_sv_s = 0$, o lo que es lo mismo

$$\left(a_1x_1^1 + \ldots a_sx_1^s, a_1x_2^1 + \ldots a_sx_2^s, \ldots, a_1x_n^1 + \ldots a_sx_n^s\right) = (0, \ldots, 0). \tag{3.0.4}$$

La igualdad (3.0.4) es verificada para alguna elección de $a_1, \ldots, a_s$, con algún $a_i \neq 0$, si el sistema

$$\begin{cases} a_1x_1^1 + \ldots a_sx_1^s = & 0 \\ a_1x_2^1 + \ldots a_sx_2^s = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_1x_n^1 + \ldots a_sx_n^s = & 0 \end{cases} \tag{3.0.5}$$

El sistema (3.0.5) es un sistema compatible de n ecuaciones en s las incógnitas $a_1, \ldots, a_s$, dado que $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$, es siempre solución. El sistema será determinado si y solamente si X es un conjunto linealmente independiente.

OBSERVACIÓN 3.10. Sea $X \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial, y $\sum_{i=1}^n a_ix_i$ una relación de dependencia no trivial. Entonces podemos reordenar los subíndices de modo que $a_1, \ldots, a_s \neq 0$ y $a_{s+1} = \cdots = a_n = 0$, en donde por definición sabemos que $s \geq 1$.

Tenemos entonces que $a_1x_1 + \cdots + a_sx_s = 0$ es *otra* relación de dependencia no trivial en X.

Del mismo modo, si $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}x = 0$ es también una relación de dependencia no trivial.

LEMA 3.11. *(1) Si $I \subset V$ es linealmente independiente e $I' \subset I$, entonces I' también es linealmente independiente.*

(2) Si $D \subset V$ es linealmente dependiente y $D \subset D' \subset V$, entonces D' también es linealmente dependiente.

DEMOSTRACIÓN. (2) Como D es linealmente dependiente, existe una relación de dependencia no trivial en D; esa misma relación de dependencia nos sirve para probar que D' es linealmente dependiente (todo elemento de D pertenece a D').

(1) Es inmediato a partir de (2) – de hecho es el contra-recíproco. $\square$

OBSERVACIÓN 3.12. En particular, la prueba del Lema 3.11 garantiza que si I es un conjunto finito linealmente independiente, entonces todo subconjunto (necesariamente finito) de I es también linealmente independiente. Esta observación es necesaria para que la Definición 3.7 de independencia lineal tenga sentido.

LEMA 3.13. *Sea $X \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial. Entonces son equivalentes:*

(1) El conjunto X es linealmente dependiente.

(2) Existe $x \in X$ de modo que $x \in \big\langle X \setminus \{x\}\big\rangle$.

(3) Existe $x \in X$ tal que $\langle X\rangle = \big\langle X \setminus \{x\}\big\rangle$.

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Longrightarrow$ (2) Si X es linealmente dependiente, existe una relación de dependencia no trivial $\sum_i b_i x_i = 0$. Si la relación es del tipo $ax = 0$, deducimos que $x = 0$, por lo que $x \in \langle X \setminus \{x\}\rangle$. En otro caso, cambiando eventualmente el orden de la suma, podemos suponer que $b_1 \neq 0$ y escribir $x_1 = \sum_2^n(-b_i/b_1)x_i$. Luego, $x_1 \in \langle X \setminus \{x_1\}\rangle$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Si podemos escribir $x = \sum a_i x_i$ con $x_i \in X \setminus \{x\}$, restando x en la igualdad anterior encontramos una relación de dependencia no trivial entre los elementos de D.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) es el contenido del Lema 3.5. $\square$

Es claro que el Lema 3.13 puede reformularse como sigue.

LEMA 3.14. *Sea $X \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial. Entonces son equivalentes:*

(1') El conjunto X es linealmente independiente.

(2') No existe ningún $x \in X$ tal que $x \in \big\langle X \setminus \{x\}\big\rangle$. Equivalentemente: para todo $x \in X$ se cumple que $x \notin \big\langle X \setminus \{x\}\big\rangle$.

(3') No existe ningún $x \in X$ tal que $\langle X\rangle = \big\langle X \setminus \{x\}\big\rangle$. Equivalentemente: para todo $x \in X$ se cumple que $\big\langle X \setminus \{x\}\big\rangle \subsetneq \langle X\rangle$. $\square$

EJEMPLO 3.15. En $\mathbb{C}^3$, $\{(1,i,0),(i,1,2),(1+2i,2+i,4)\}$ es un conjunto linealmente dependiente, ya que $(2+2i,2+2i,4) = (1,i,0)+2(i,1,2)$.

COROLARIO 3.16. *Supongamos que I es un subconjunto de V que es linealmente independiente; sea $v \in V \setminus I$ un vector fijo.*

(1) El conjunto $I \cup \{v\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $v \in \langle I\rangle$.

(2) El conjunto $I \cup \{v\}$ es linealmente independiente si y sólo si $v \notin \langle I\rangle$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Se deduce del Lema 3.13 que si $v \in \langle I\rangle$ entonces $I \cup \{v\}$ es linealmente dependiente. En efecto, como $v \notin I$, tenemos que $\big(I \cup \{v\}\big) \setminus \{v\} = I$, por lo que se verifica (2) de dicho lema, tomando $X = I \cup \{v\}$ y $x = v$.

Recíprocamente, si $I \cup \{v\}$ es linealmente dependiente existe una relación de dependencia no trivial $av + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, para ciertos $a, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$, con $x_i \in I$. Si $a \neq 0$, entonces $v = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{a} x_i$, por lo que $v \in \langle I\rangle$. Si $a = 0$, tenemos que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, por lo que $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$ — recordemos que I es linealmente independiente —, lo que contradice que la relación de dependencia $av + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ es no trivial.

(2) Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la propiedad (1) – de hecho es el contra-recíproco de (1). □

Teorema 3.17. *Sea $B \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

(1) El conjunto B es linealmente independiente y genera V.

(2) El conjunto B no contiene al 0, y si $v \in V$ es no nulo, existen vectores $x_1, \dots, x_k \in B$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y escalares $a_1, \dots, a_k \in \Bbbk$ no nulos tales que $v = \sum_1^k a_i x_i$, además los vectores y los escalares que verifican lo anterior son únicos.

(3) El conjunto B es generador minimal de V, i.e., B genera V y si $I \subsetneq B$ entonces I no genera V.

(4) El conjunto B es linealmente independiente maximal en V, i.e., B es linealmente independiente y si $B \subsetneq G$ entonces G no es linealmente independiente.

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Claramente $0 \notin B$, ya que de lo contrario B sería linealmente dependiente. Sea $v \in V$ con $v \neq 0$; como B genera V, existen elementos $x_1, \dots x_k \in B$ y escalares no nulos $a_1, \dots, a_k$ tales que $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$. Afirmamos que estos vectores y escalares son únicos. En efecto, si hubiera otros $y_1, \dots, y_\ell \in B$ y escalares $b_1, \dots, b_\ell$ de modo que $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = b_1y_1 + \cdots + b_\ell y_\ell$ queremos probar que los vectores x's y los y's coinciden y que lo mismo sucede con los escalares. Consideremos el conjunto — que puede ser vacío — $\{z_1, \dots, z_t\} = \{x_1, \dots, x_k\} \cap \{y_1, \dots, y_\ell\}$. Reordenando los subíndices, podemos suponer que

$$a_1z_1 + \cdots + a_tz_t + a_{t+1}x_{t+1} + \cdots + a_kx_k = b_1z_1 + \cdots + b_tz_t + b_{t+1}y_{t+1} + \cdots + b_\ell y_\ell.$$

Luego,

$$(a_1 - b_1)z_1 + \cdots + (a_t - b_t)z_t + a_{t+1}x_{t+1} + \cdots + a_kx_k - b_{t+1}y_{t+1} - \cdots - b_\ell y_\ell = 0,$$

y de la independencia lineal de los elementos de B deducimos que $a_i = b_i$ para $i = 1, \dots, t$ y además que $t = k = \ell$. Esto sucede pues en caso contrario tendríamos que $a_{t+1} = \cdots = a_k = b_{t+1} = \cdots = b_\ell = 0$ lo que es imposible ya que $a_i \neq 0$ y $b_i \neq 0$ por construcción.

(2) $\Longrightarrow$ (1) La existencia de una representación de la forma $v = \sum a_i x_i$ para un vector cualquiera de V significa que a que $\langle B \rangle$ genera V. Veremos ahora que B es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que existe alguna relación de dependencia no trivial $0 = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r$ entre vectores de B donde suponemos que todos los escalares son no nulos y los vectores son diferentes. Si $k = 1$, la relación de dependencia es del tipo $a_1x_1 = 0$, y como $a_1 \neq 0$, tenemos que $x_1 = 0$, absurdo. Luego $k \geq 2$, y tenemos que $-a_1x_1 = a_2x_2 + \cdots + a_rx_r$, $a_2 \neq 0$. Eso viola nuestra hipótesis sobre la unicidad de la expresión en (2).

(1) $\Longrightarrow$ (3) Supongamos que existe $I \subsetneq B$ que es también generador. Tomando $x \in B \setminus I$ y usando el Corolario 3.16, como $x \in \langle I \rangle$ concluimos que $I \cup \{x\} \subset B$ es linealmente dependiente y esto no es posible pues B es linealmente independiente.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Si B es generador minimal tiene que ser linealmente independiente. Si no lo fuera, habría un vector $x \in B$ tal que $\langle B \rangle = \langle B \setminus \{x\} \rangle$ y eso contradice el hecho de que B es generador minimal. Queremos probar ahora que B es linealmente independiente maximal. Supongamos sea $B \subsetneq G$ y tomemos $z \in G \setminus B$. Como B genera V sabemos que existen elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$ en B y escalares $\{a_1, \dots, a_n\}$ tales que $z = \sum a_i x_i$. Esto

implica que el subconjunto finito $\{z, x_1, \ldots, x_n\} \subset G$ no es linealmente independiente, luego G no puede ser linealmente independiente.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Queremos probar que si B es linealmente independiente maximal, entonces genera V. Si existiera algún vector $v \in V$ no generado por B, tendríamos (ver Corolario 3.16) que $B \cup \{v\}$ sería también linealmente independiente y como contiene estrictamente a B obtenemos una contradicción. □

DEFINICIÓN 3.18. Si V es un espacio vectorial un subconjunto $B \subset V$ que verifique las condiciones del Teorema 3.17 se dice que es una *base* de V.

OBSERVACIÓN 3.19. Por razones mnemotécnicas, si V es un espacio vectorial en general las bases serán representadas por las letras $B, B', C, \ldots$, los subconjuntos generadores por las letras $G, G', F, \ldots$, los subconjuntos linealmente independientes $I, I', J, \ldots$ y los subconjuntos linealmente dependientes $D, D', E, \ldots$.

DEFINICIÓN 3.20. Un espacio vectorial V se dice que es *finitamente generado* si existe algún subconjunto finito $G = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ que es generador de V.

TEOREMA 3.21. *Si $V \neq \{0\}$ es un espacio vectorial finitamente generado y G es un conjunto generador con una cantidad finita de elementos, existe una base B de V contenida en G. En particular, V admite una base con una cantidad finita de elementos.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis V admite un conjunto generador G con una cantidad finita de elementos, luego, si la primera parte del teorema es verdadera, podemos encontrar una base contenida en G que obviamente tendrá una cantidad finita de elementos.

Probaremos entonces la primera parte. Si G es linealmente independiente, es también una base, por el Teorema 3.17. Si G no es linealmente independiente, existe algún vector $x \in G$ con la propiedad que $\big\langle G \setminus \{x\} \big\rangle = \langle G \rangle$. Luego, el conjunto $G' = G \setminus \{x\}$ es un conjunto generador con menos elementos que el original. Si este conjunto es linealmente independiente, la demostración está terminada; si no, iteramos el procedimiento. En el peor de los casos llegamos a encontrar un conjunto con *un* elemento que es generador. Un conjunto con *un* elemento v es siempre linealmente independiente a menos que $v = 0$. En ese caso el espacio vectorial entero sería $\{0\}$ contra la hipótesis. □

OBSERVACIÓN 3.22. (1) El teorema anterior se puede expresar así: de todo conjunto finito de generadores se puede extraer una base. O sea, a un conjunto finito de generadores se le pueden quitar algunos vectores de modo de que los restantes — que son tan sólo *algunos* de los vectores del conjunto original — sigan siendo generadores y sean además linealmente independientes.

(2) El Teorema 3.21 es válido aún cuando el espacio no sea finitamente generado, o sea aún cuando V no admita ningún conjunto generador con una cantidad finita de elementos. Se prueba así que todo conjunto generador contiene una base. El razonamiento necesario para demostrar esta afirmación es similar al anteriormente realizado, pero necesitamos recurrir a métodos de "inducción transfinita".

EJEMPLO 3.23. (1) El conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$, donde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ es la n-upla con todos sus coeficientes cero salvo en el lugar i, donde tiene un 1, es una base de $\mathbb{k}^n$, llamada *base canónica*.

(2) En el espacio $\mathrm{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ definimos las matrices E_{ij}, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. La matriz E_{ij} tiene todas las entradas iguales a cero excepto la entrada correspondiente a la fila i y a la columna j; esta entrada suponemos que vale uno. Explícitamente,

$$E_{i,j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es obvio que el conjunto $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es una base de $\mathrm{M}_{n\times m}(\Bbbk)$.

En la identificación de $\mathrm{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ con $\mathbb{R}^{nm}$ (ver el Ejemplo 2.18), la base E_{ij} es la base canónica (eventualmente descrita en otro orden).

(3) El conjunto $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ es una base de $\Bbbk[t]$. El conjunto $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ es una base de $\Bbbk_n[t]$.

(4) El espacio vectorial $V = \{0\}$ tiene por base el conjunto vacío. Esta afirmación debe interpretarse como una convención. En ese caso, el Teorema 3.21 es verdadero para el espacio $V = \{0\}$ tomando $B = \emptyset$.

(5) En el Ejemplo 3.2, (5) la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se puede "extraer" del conjunto generador G, aunque éste no sea finito. Recordar que el Teorema 3.21 es verdadero aunque G no sea finito (ver Observación 3.22).

(6) En $\Bbbk_1[t]$ los polinomios $\{1-t, 2-t, t\}$ son generadores y el subconjunto $\{1-t, t\} \subset \{1-t, 2-t, t\}$ es una base.

TEOREMA 3.24. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado e $I \neq \emptyset$ un conjunto linealmente independiente, entonces I es finito. Más aún, si I es un conjunto linealmente independiente y G un conjunto generador finito, existe otro conjunto generador G' con el mismo número de elementos que G de modo que $I \subset G'$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que la primera afirmación se deduce directamente de la segunda, probaremos solamente ésta. Primeramente, observemos que como V es finitamente generado, podemos suponer que G es finito. En efecto, si G no es finito consideramos G'' generador finito; si el resultado está probado para generadores finitos existe un generador G' con la misma cantidad de elementos que G'' que contiene a I. Completamos entonces G' hasta tener un generador con la misma cantidad de G'' (agregando elementos cualesquiera) y el resultado está probado.

Sea $x_1 \in I$ y $G = \{z_1, \dots, z_m\}$. Escribimos $x_1 = a_1 z_1 + \cdots + a_m z_m$. Alguno de los coeficientes a_i, con $i = 1, \dots, m$, es no nulo, pues los elementos de un conjunto linealmente independiente no pueden ser nulos, ver Ejemplo 3.9(4). Si suponemos que es el primero, podemos escribir:

$$z_1 = (1/a_1)x_1 - (a_2/a_1)z_2 + \cdots - (a_m/a_1)z_m,$$

lo que implica que $\{x_1, z_2, \dots, z_m\}$ es generador de V. En efecto, como $\{z_1, \dots, z_m\} \subset \langle x_1, z_2, \dots, z_m\rangle$, tenemos que

$$V = \langle z_1, \dots, z_m\rangle \subset \langle x_1, z_2, \dots, z_m\rangle \subset V.$$

De esa forma sustituimos en G el vector z_1 por el vector x_1. Supongamos ahora que este proceso de sustitución se ha realizado hasta la etapa $k \leq n$, o sea que tenemos $\{x_1, \dots, x_k\} \subset I$ y hemos obtenido $G_k = \{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_m\}$ que sigue siendo un conjunto generador de V con el mismo número de elementos que G. Si $I = \{x_1, \dots, x_k\}$ el resultado está probado. Si existe $x_{k+1} \in I \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, escribimos

$$x_{k+1} = b_1x_1 + \cdots + b_kx_k + b_{k+1}z_{k+1} + \cdots + b_mz_m.$$

Si $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = b_m = 0$, tendríamos una relación de dependencia lineal entre los vectores $\{x_{k+1}, x_1, \dots, x_k\}$ y esto es imposible pues estos vectores son linealmente independientes. Luego, algún coeficiente no es cero; por lo que podemos suponer que $b_{k+1} \neq 0$. En ese caso, procediendo como antes, sustituimos en $G_k = \{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_m\}$ el vector z_{k+1} por el vector x_{k+1} y obtenemos $G_{k+1} = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_m\}$, que es también generador y tiene m elementos. Si agotáramos los z's antes que los x's o sea si $\#(I) > m$, tendríamos en la etapa m dos conjuntos, el inicial $I \supsetneq \{x_1, \dots, x_m\}$ y $G_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ que es generador, además de (al menos) un vector $x_{m+1} \in I \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Esto es imposible dado que por ser G_m generador podríamos escribir al vector x_{m+1} como combinación lineal de los vectores de $G_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ y eso produciría una relación de dependencia lineal no trivial entre vectores de I. □

Corolario 3.25. *Sea V es un espacio vectorial finitamente generado, I un conjunto linealmente independiente y G un conjunto generador finito. Entonces $\#(I) \leq \#(G)$.*

Demostración. Se deduce inmediatamente del Teorema 3.24. En efecto, dicho teorema nos garantiza que existe un generador G' con las misma cantidad de elementos de G, que contiene a I. □

Teorema 3.26. *Sea V es un espacio vectorial finitamente generado y B, B' dos bases de V. Entonces B y B' tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Aplicando el Corolario 3.25 una vez a $B = I$, $B' = G$ y otra a $B' = I$, $B = G$ se deduce el resultado. □

El teorema anterior, que afirma que todas las bases tienen el mismo número de elementos, justifica la siguiente definición.

Definición 3.27. Si V es un espacio vectorial finitamente generado sobre $\Bbbk$, se define la *dimensión* de V sobre $\Bbbk$ como el número de elementos de una base cualquiera. Se usa el símbolo $\dim_{\Bbbk}(V)$, o simplemente $\dim(V)$, para representar la dimensión de V. En el futuro, y teniendo en cuenta los resultados anteriores, en lugar de decir que un espacio vectorial es finitamente generado diremos que tiene dimensión finita.

Si V no es finitamente generado, diremos que tiene dimensión *infinita*, y notamos $\dim_{\Bbbk}(V) = \infty$ –ver Observación 3.28–.

Observación 3.28. (1) Es importante destacar que la dimensión de un espacio vectorial depende del cuerpo elegido. Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el propio $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión 2 y sobre $\mathbb{C}$ tiene dimensión 1. Si consideramos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$. para probar este último hecho alcanza con observar que π no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Luego, $I = \{\pi, \pi^2, \dots, \pi^n, \dots\}$ es un conjunto linealmente independiente con cardinal infinito, de donde aplicando el Teorema 3.24 deducimos por absurdo que $\mathbb{R}$ no puede ser finitamente generado sobre $\mathbb{Q}$ (si lo fuera, I debería ser finito).

(2) El Teorema 3.26 vale para espacios vectoriales no necesariamente finitamente generados (observar que para definir base no se necesita que el espacio sea finitamente generado). Eso da lugar a la existencia de bases infinitas en ciertos espacios. Usando métodos de teoría de conjuntos se puede probar que todo espacio vectorial admite una base y que todas las bases tienen el mismo cardinal – donde el concepto de cardinal usado generaliza el concepto de "número de elementos", para conjuntos no necesariamente finitos.

(3) En el espacio vectorial $\Bbbk[t]$ tenemos la base infinita numerable $\{1, t, t^2, \dots\}$.

Ejemplo 3.29. (1) Si $V = \{0\}$, entonces $\dim(V) = 0$.

(2) Como la base canónica de $\Bbbk^n$ tiene n elementos, $\dim_{\Bbbk}(\Bbbk^n) = n$.

(3) Por las mismas razones que antes, $\dim_{\Bbbk}\big(\mathrm{M}_{n\times m}(\Bbbk)\big) = nm$.

Corolario 3.30. *Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita n. Si G es un conjunto generador finito, entonces $\#(G) \geq n$, y si I es un conjunto linealmente independiente, entonces $\#(I) \leq n$.*

Demostración. Si G es generador y B es una base de V, sabemos que $\#(G) \geq \#(B) = n$. Si I es linealmente independiente, entonces $\#(I) \leq \#(B) = n$. $\square$

Corolario 3.31. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Si G es un subconjunto generador de V con n elementos, entonces es una base.*

Demostración. Si G genera V, podemos encontrar en G una base — ver Teorema 3.26. Pero esa base debe tener el mismo número de elementos que G luego debe ser igual a G. $\square$

Corolario 3.32. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita e $I \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces existe una base de V que contiene a I.*

Demostración. Si B es una base cualquiera, al ser B un conjunto generador, podemos aplicar el Teorema 3.24, de modo de asegurar que hay otro generador B', con el mismo cardinal que B, tal que $I \subset B'$. Usando el Corolario 3.31, deducimos que B' es también una base de V. $\square$

Corolario 3.33. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Si I es un conjunto linealmente independiente con n elementos, entonces I es una base de V.*

Demostración. Como I es linealmente independiente, lo podemos completar a una base B que tiene n elementos — ver Teorema 3.24 o Corolario 3.32. Como por hipótesis I también tiene n elementos, concluimos que $I = B$. $\square$

Corolario 3.34. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W es finitamente generado y* $\dim W \leq \dim V$. *Más aún,* $\dim W = \dim V$ *si y sólo si* $W = V$.

Demostración. Sea $I \subset W$ un conjunto linealmente independiente en W. Entonces I es linealmente independiente como subconjunto de V, por lo que existe una base B de

V tal que $I \subset B$. Luego $\#I \leq \#B = \dim V$. De lo anterior se deduce que un subconjunto linealmente independiente de W tiene a lo sumo $\dim V$ elementos, y por lo tanto W es finitamente generado, con $\dim W \leq \dim V$.

Finalmente, si $\dim W = \dim V$ entonces una base de W es un subconjunto de V linealmente independiente con $\dim V$ elementos; luego el Corolario 3.33 nos garantiza que es una base de V, y $W = V$. □

El Corolario 3.32 nos permite probar la existencia de *complementos directos* para un subespacio.

DEFINICIÓN 3.35. Sea V un $\Bbbk$–espacio y $W \subset V$ un subespacio. Decimos que un subespacio $N \subset V$ es un *complemento directo* para W si $V = W \oplus N$.

Antes de probar la existencia de complementos directos, veamos cómo obtener bases de un espacio a partir de sus sumandos directos.

LEMA 3.36. *Sea V un espacio vectorial y $V = W_1 \oplus W_2$ una descomposición en suma directa. Consideremos $\mathcal{B}_1 \subset W_1$ y $\mathcal{B}_2 \subset W_2$ bases de W_1 y W_2 respectivamente. Entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V.*

Recíprocamente, si $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V, con $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, entonces $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

En particular, $\dim V < \infty$ *si y solamente si* $\dim W_2 < \infty$ *para $i = 1, 2$, y en ese caso* $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que de la inclusión $\langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle \supset \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cup \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ se deduce que $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$. Por otro lado, como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, tenemos que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Luego, una relación de dependencia en $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ se obtiene considerando $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}_1$ e $y_1, \ldots, y_l \in \mathcal{B}_2$ distintos dos a dos, y escalares $a_i, b_j \in \Bbbk$ tales que $\sum a_i x_i + \sum b_j y_j = 0$. De $V = W_1 \oplus W_2$, deducimos que $0 = \sum a_i x_i \in W_1$ y $0 = \sum b_j y_j \in W_2$, y de la independencia lineal de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ deducimos entonces que $a_1 = \cdots = a_n = 0$ y $b_1 = \cdots = b_l = 0$.

Sean ahora $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (unión disjunta) una base de V. Entonces

$$\langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle = \big\langle \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cup \langle \mathcal{B}_2 \rangle \big\rangle \supset \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle = V$$

Luego, $\langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle = V$. Si $0 = w_1 + w_2$, $w_i \in \langle \mathcal{B}_i \rangle$, entonces $0 = \sum a_i x_i + \sum b_j y_j$, con $x_i \in \mathcal{B}_1$ y $y_j \in \mathcal{B}_2$. Como $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, estamos en presencia de una relación de dependencia en $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, que debe ser trivial por ser $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ linealmente independiente. Deducimos entonces que $w_1 = w_2 = 0$.

La prueba de la afirmación sobre las dimensiones es inmediata, y queda a cargo del lector. □

El lema anterior se generaliza a una suma directa de una familia arbitraria de subespacios:

TEOREMA 3.37. *Sea V un espacio vectorial y $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$ una descomposición en suma directa. Consideremos bases $\mathcal{B}_i \subset W_i$, $i \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es una base de V.*

Recíprocamente, si $\mathcal{B}_i$ $i \in I$ es una familia de conjuntos linealmente independientes dos a dos disjuntos tales que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es una base de V, entonces $V = \bigoplus_{i \in I} \langle \mathcal{B}_i \rangle$.

En particular, si $\#I < \infty$, entonces $\dim V < \infty$ *si y solamente si* $\dim W_i < \infty$ *para todo $i \in I$, y en ese caso* $\dim V = \sum \dim W_i$.

Demostración. Probemos la primera afirmación. Consideremos un vector $v \in V$. Entonces existen $i_1, \dots, i_n \in I$ y $w_{i_j} \in W_{i_j}$ tales que $v = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n}$. Como B_{i_j} es base de W_{i_j}, $j = 1, \dots, n$, tenemos que existen vectores $v_1^j, \dots, v_{k_j}^j \in B_{i_j}$ y escalares $a_1^j, \dots, a_{k_j}^j \in \Bbbk$ tales que $w_{i_j} = \sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j$. Luego,

$$v = \sum_{i=1}^{n} w_{i_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j \in \Big\langle \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \Big\rangle.$$

Hemos probado que $V = \left\langle \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \right\rangle$. Consideremos ahora una relación de dependencia

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j = 0,$$

donde $v_1^j, \dots, v_{k_j}^j \in B_{i_j}$ y $a_1^j, \dots, a_{k_j}^j \in \Bbbk$ para todo $j = 1, \dots, n$. Entonces, como $\sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j$ para todo $j = 1, \dots, n$, y la familia $\{E_i : i \in I$ es linealmente disjunta, tenemos que $\sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j = 0$ para todo $j \in [n]$. Como $\mathcal{B}_{i_j}$ es una base, deducimos que $a_{i_h}^j = 0$ para todo $j \in [n]$, $h \in [k_j]$.

Dejamos la prueba de las restantes afirmaciones como ejercicio (ver Ejercicio 28). □

Corolario 3.38. *Sea V un $\Bbbk$–espacio de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W admite un complemento directo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_l\}$ una base de W. Por construcción, $\mathcal{B}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en V. Usando el Corolario 3.32, podemos completar $\mathcal{B}$ a una base de V, que notamos $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_l, v_{l+1}, \dots, v_n\}$. Si definimos $N = \langle v_{l+1}, \dots, v_n \rangle$ el Lema 3.36 nos garantiza que $W \oplus N = V$. □

Observación 3.39. Nótese que en la prueba anterior el hecho que $\dim V < \infty$ se usó para poder completar la base de W en una de V. Como ya fuera comentado, éste resultado de completación es válido aunque $\dim V = \infty$ por lo que en realidad el complemento directo existe aunque el espacio sea de dimensión infinita.

1. Ejercicios

Recordemos que $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ si toda vez que sumamos n veces 1, el resultado es distinto de 0: $1 + \cdots + 1 \neq 0$.

1. En los siguientes casos determinar si $A \subseteq \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente; en caso de que no lo sea escribir un vector de A como combinación lineal de los restantes:

(a) $A = \{(1,-3,2),(2,-4,1),(5,3,2),(1,-5,5)\}$;
(b) $A = \{(1,2,1),(1,0,-4),(4,3,-1)\}$;
(c) $A = \{(2,3,4),(2,1,-4),(12,11,-4)\}$;
(d) $A = \{(1,-2,m),(3,0,2),(2,1,-5)\}$ (discutiendo según el valor de m).

2. En los siguientes casos determinar si el conjunto $A \subseteq V$ es l.i.

(a) $V = C[a,b]$, $A = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$.
(b) $V = C[a,b]$, $A = \{f,g\}$ siendo $f(x) = |x-a|$ y $g(x) = |x-b|$.
(c) $V = \Bbbk[x]_2$, $A = \{x, x^2+1, 2x^2+bx+a\}$, donde $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ — discutir según a y b.
(d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $A = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

3. Sea $V = \Bbbk[x]$, donde $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Determinar si $A = \{2, t+1, t^2+1, (t+1)^2\}$ es linealmente independiente.

4. Sean $(V,+,\cdot)$ un $\Bbbk$–espacio vectorial, con $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, y $u,v,x \subseteq V$ tales que $\{u,v\}$ es linealmente independiente y $\{u,x\}$ es linealmente dependiente. En los siguientes casos, determinar si $A \subseteq V$ es linealmente independiente:

(a) $A = \{u\}$;
(b) $A = \{u, 5v\}$;
(c) $A = \{u-v, u+3v\}$;
(d) $A = \{2u-v, -4u+2v\}$;
(e) $A = \{u+v, x\}$;
(f) $A = \{u+x, v+x\}$.

5. Sean $A = \{u_1,u_2\}$ y $B = \{v_1,v_2\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $A \cup B$ es l.i.. Hallar $z \in V$, sabiendo que z es combinación lineal de los elementos de A y los elementos de B simultáneamente.

6. Averiguar si los siguientes conjuntos A son generadores del espacio V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,2)\big\}$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \big\{(1,0,1),(-1,1,2),(0,1,3),(-2,1,1)\big\}$;
(c) $V = \Bbbk[x]_3$, con $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, $A = \big\{1, 1+x^2, 1-x+x^2+x^3, 4-x+2x^2+x^3\big\}$;
(d) $V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 6x-2y-2z = 0\big\}$, $A = \big\{(1,2,1),(1,0,3)\big\}$.

7. En los siguientes casos hallar un subconjunto linealmente independiente maximal del conjunto A,

(a) $A = \big\{(1,0,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(2,0,-1,0)\big\} \subseteq \mathbb{R}^4$;
(b) $A = \big\{x^2, x^2-x+1, 2x-2, 3\big\} \subseteq \mathbb{Q}[x]$;

(c) $A = \{M_1, M_2, M_3\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ siendo $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$.

8. Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de V.

1. Probar que si $\langle G_1 \rangle = W_1$ y $\langle G_2 \rangle = W_2$, entonces $\langle G_1 \cup G_2 \rangle = W_1 + W_2$.
2. Si además pedimos que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Probar que si $I_1 \subset W_1$, $I_2 \subset W_2$ son conjuntos linealmente independientes, entonces $I_1 \cup I_2$ es linealmente independiente. *Sugerencia: Si W_1 y W_2 son linealmente disjuntos entonces $v_1 + v_2 = 0$ implica que $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$.*

9. Sean $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva y A un subconjunto de V. Probar que A es linealmente independiente si y solamente si $T(A)$ lo es.

10. Sea $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p'(1) = 0\}$, donde $p'(x)$ es la derivada del polinomio $p(x)$.

1. Demostrar que U es subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Probar que $\{2x^3 - 3x^2, 2x - x^2, 2\}$ es un conjunto linealmente independiente.
3. Decida si $U = \langle \{2x^3 - 3x^2, 2x - x^2, 2\} \rangle$.

11. Sean V un espacio vectorial y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ subconjuntos de V tales que $\langle A \rangle$ coincide con $\langle B \rangle$. Demostrar que A es linealmente independiente si y sólo si B lo es.

12. Sean V un espacio vectorial y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ subconjuntos de V tales que $\langle A \rangle$ coincide con $\langle B \rangle$. Demostrar que A es linealmente independiente si y sólo si B lo es.

13. Sea $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det A \neq 0$. SUGERENCIA: Hallar un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado cuya matriz asociada sea A. Veremos más adelante en el curso que la condición $\det A \neq 0$ es equivalente a que la matriz A sea invertible para el producto de matrices.

14. Determinar si el conjunto de vectores dado es una base para el espacio vectorial correspondiente.

(a) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{1 - x^2, x\}$.
(b) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3\}$.
(c) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{-3x, 1 + x^2, x^2 - 5\}$.
(d) En $\mathbb{R}_3[x]$, $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$.
(e) En $\mathbb{R}_3[x]$, $\{3, x^3 - 4x + 6, x^2\}$.
(f) En $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ donde } abcd \neq 0 \right\}$.
(g) En $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right\}$.
(h) En $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$, $\{(1, -1), (-3, 3)\}$.

15. Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$.
(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6 = 0\}$.
(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x/2 = y/3 = z/4\}$.

16. Sea $A \subseteq \mathcal{C}^1[a, b]$. Notamos $A' = \{f' : f \in A\} \subset \mathcal{C}[a, b]$. Probar que $A \cup \{1\}$ es l.i. si y sólo si A' es l.i., donde 1 denota la función constante igual a 1.

17. Sea $A \subseteq C^1[a, b]$. Notamos $A' = \{f' : f \in A\} \subset C[a, b]$. Probar que $A \cup \{1\}$ es l.i. si y sólo si A' es l.i., donde 1 denota la función constante igual a 1.

18. En $\mathbb{R}^4$ consideremos los vectores $(1 + a, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + a, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + a, 1)$, $(1, 1, 1, 1 + a)$. Determinar según el parámetro a la dimensión y una base del subespacio vectorial que generan.

19. Sean U, W subespacios de V tal que $U \cap W = \{0\}$. Si $y_1, \ldots, y_r$ son elementos linealmente independientes de U y $z_1, \ldots, z_s$ son elementos linealmente independientes de W, entonces $y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_s$ son linealmente independientes. Deducir que si B y C son bases de U y W respectivamente, entonces $B \cup C$ es una base de $U \oplus W$.

20. Sean $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$. Probar que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Hallar $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ y dar bases de los mismos.

21. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Dados n números reales diferentes $a_1 \ldots, a_n$ se definen:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x - a_2) \cdots (x - a_n) \\ f_2 &= (x - a_1)(x - a_3) \cdots (x - a_n) \\ &\vdots \\ f_n &= (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1}) \end{aligned}$$

Demostrar que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

22. Mostrar que el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$ no tiene dimensión finita.

23. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $U, W \subset V$ dos subespacios.

(a) Probar que para toda base B de $U \cap W$ existen bases C y C' de U y W respectivamente tales que $B \subset C$, $B \subset C'$.
(b) Deducir que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$.

24. Sean V, W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita con bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ respectivamente. Consideremos el conjunto

$$B = \{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_n)\} \subset V \times W.$$

Probar que B es base de $V \times W$ y concluir que $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los conjuntos $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = z, y = t\}$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / t = 0, z + y = x\}$.

(a) Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^4$ y calcular sus dimensiones.
(b) Encontrar una base de $S \cap T$ y una base de $S + T$.

26. Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = 0, d = 2a \right\}$$

y

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Hallar una base y la dimensión de W_1.
2. Hallar una base y la dimensión de W_2.
3. Probar que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

27. Sea $V = \{(x, y, z) \in \Bbbk^3 : y + z = x\}$ y $T : V \to V$ definida por $T(x, y, z) = (y - x, x - y, 2y - 2x)$, con $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, es decir $2 = 1 + 1 \neq 0$.

(a) Hallar bases de $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
(b) Sea $W = \{(x, y, z) \in \Bbbk^3 : x = y = 0\}$. Probar que $\Bbbk^3 = V \oplus W$.

28. Terminar la prueba del Teorema 3.37.