Ejercicio 28

Parte a)

$$\boldsymbol{z}(t) = Acos(\omega t)\hat{k}$$

$$\boldsymbol{P}(t) = q_0\boldsymbol{z}(t) \rightarrow \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -q_0\omega Asen(\omega t)\hat{k} \rightarrow \frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2} = -q_0\omega^2 Acos(\omega t)\hat{k}$$

$$\rightarrow \left\|\left[\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right]\right\|^2 = q_0^2\omega^4 A^2$$

$$\rightarrow P_{D.E} \cong \frac{\mu_0}{6\pi c}\left\|\left[\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right]\right\|^2 = \frac{\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{6\pi c}\sin^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$< P_{D.E} >= \frac{\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{6\pi c} < \sin^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) >= \frac{\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{12\pi c}$$

Siendo $a = \omega^2 A$

Parte b)

$$\boldsymbol{z}(t) = Acos(2\omega t)\hat{k}$$

$$\boldsymbol{P}(t) = q_0\boldsymbol{z}(t) \rightarrow \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -2q_0\omega Asen(\omega t)\hat{k} \rightarrow \frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2} = -4q_0\omega^2 Acos(\omega t)\hat{k}$$

$$\rightarrow \left\|\left[\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right]\right\|^2 = 16q_0^2\omega^4 A^2$$

$$\rightarrow P_{D.E} \cong \frac{\mu_0}{6\pi c}\left\|\left[\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right]\right\|^2 = \frac{16\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{6\pi c}\sin^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = \frac{8\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{3\pi c}\sin^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$< P_{D.E} >= \frac{8\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{3\pi c} < \sin^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) >= \frac{4\mu_0 q_0^2\omega^4 A^2}{3\pi c} = \frac{4\mu_0 q^2 a^2}{3\pi c}$$

LO QUE SIGUE A CONTINUACION ES ALGO QUE QUERIA SABER POR MI CUENTA, SI ESTA CONFIGURACION DE CARGA EMITE RADIACIÓN DE ORDEN SUPERIOR. LO REALICE SOLO CON LA PARTE A YA QUE LAS CUENTAS SON ANALOGAS PARA LA PARTE B.

Esta configuración no emite radiación dipolar magnética, ya que el vector $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{J}$ son colineales entonces.

$$\boldsymbol{m} = q(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J}) = 0$$

Por otra parte, si hay radiación cuadrupolar, para ello es fundamental calcular en tensor $\overleftrightarrow{Q}_{\alpha\beta}$:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i(3r_\alpha r_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)$$

Entonces:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -z^2 q$$

$$Q_{zz} = 2z^2 q$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{zx} = Q_{xz} = Q_{zy} = Q_{yz} = 0$$

Entonces:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -qz^2 & 0 & 0 \\ 0 & -qz^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2qz^2 \end{bmatrix}$$

Ahora notar que $z(t)$, además es una funciona armónica, admite derivada tercera, entonces:

$$\frac{d^3 \mathbf{z}^2}{dt^3} = 8A^2\omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t) = 4A^2\omega^3 \sin(2\omega t)$$

Entonces:

$$\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3} = \begin{bmatrix} -4qA^2\omega^3 \sin(2\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & -4qA^2\omega^3 \sin(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 8qA^2\omega^3 \sin(2\omega t) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3}\right)^2 = 2(16q^2A^4\omega^6 \sin^2(2\omega t)) + 64q^2A^4\omega^6 \sin^2(2\omega t) = 96q^2A^4\omega^6 \sin^2(2\omega t)$$

Entonces:

$$P_{C.E} \cong \frac{\mu_0}{720\pi c^3}\left[\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3}\right)^2\right] = \frac{\mu_0}{720\pi c^3}(96q^2A^4\omega^6 \sin^2(2\omega t))$$
$$= \frac{2A^4q^2\omega^6}{15\pi c^3}\sin^2\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

Ejercicio 31

Hay que calcular la potencia media radiada del cuadrupolo lineal, de este problema.

$$z(t) = ae^{-i\omega t}$$

$$r_1 = (0,0,z)$$

$$r_2 = (0,0,-z)$$

$$r_3 = (0,0,0)$$

Entonces:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i\left(3r_\alpha r_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2\right)$$

$$Q_{xx} = Q_{11} = q(3(0)(0) - z^2) + q(3(0)(0) - z^2) = -2qz^2$$

$$Q_{yy} = Q_{22} = q(3(0)(0) - z^2) + q(3(0)(0) - z^2) = -2qz^2$$

$$Q_{zz} = Q_{33} = q(3(z)(z) - z^2) + q(3(-z)(-z) - z^2) = 4qz^2$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{zx} = Q_{xz} = Q_{zy} = Q_{yz} = 0$$

Entonces:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -2qz^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2qz^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4qz^2 \end{bmatrix}`$$

Ahora debemos de derivar esta matriz tres veces con respecto al tiempo, notar que la única variable que depende del tiempo es $z^2(t)$, entonces:

$$z^2(t) = a^2 e^{-2i\omega t}$$

$$\frac{d^3 \boldsymbol{z}^2}{dt^3} = 8ia^2\omega^3 e^{-2i\omega t}$$

Poniendo este valor en la matriz:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -16qia^2\omega^3 e^{-2i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & -16qia^2\omega^3 e^{-2i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 32qia^2\omega^3 e^{-2i\omega t} \end{bmatrix}`$$

$$\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3} \right)^2 = \left(-16qia^2\omega^3 e^{-2i\omega t}\right)^2 + \left(-16qia^2\omega^3 e^{-2i\omega t}\right)^2 + \left(32qia^2\omega^3 e^{-2i\omega t}\right)^2$$

Como:

$$ie^{i\theta} = sen(\theta) - icos(\theta)$$

Entonces:

$$\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3} \right)^2 = 2\left(16\omega^3 a^2 q sen(2\omega t)\right)^2 + \left(32\omega^3 a^2 q sen(2\omega t)\right)^2$$

$$\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3} \right)^2 = 512\omega^6 a^4 q^2 sen^2(2\omega t) + 1024\omega^6 a^4 q^2 sen^2(2\omega t)$$

$$\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3} \right)^2 = 1536\omega^6 a^4 q^2 sen^2(2\omega t)$$

$$P_{C.E} \cong \frac{\mu_0}{720\pi c^3} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{d^3 Q_{\alpha\beta}}{dt^3} \right)^2 = \frac{\mu_0}{720\pi c^3}\left(1536\omega^6 a^4 q^2 sen^2(2\omega t)\right)$$

$$= \frac{32\omega^6 a^4 q^2 sen^2\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{15\pi c^3}$$

$$< P_{C.E} >= \frac{32\omega^6 a^4 q^2 sen^2 < \left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) >}{15\pi c^3} = \frac{16\omega^6 a^4 q^2}{15\pi c^3}$$

Ejercicio 32:

Datos:

$$\lambda = 500nm = 500 \times 10^{-9}m$$

Parte a:

$$\tau = 10^{-7}s$$

$$E_{foton} = \frac{h\omega}{2\pi} = \frac{h2\pi f}{2\pi} = \frac{hc}{\lambda}$$

El tiempo de vida medio τ se define como el tiempo que tiene que transcurrir para que el átomo emita ese fotón de energía, el cual está asociado a $\langle P \rangle$:

$$\tau = \frac{h_{barra}\omega}{\langle P \rangle_{foton}} \rightarrow \langle P \rangle_{foton} = \frac{hc}{\lambda\tau} = \frac{\left(6{,}626 \times 10^{-34}\left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]\right)\left(3{,}0 \times 10^8\left[\frac{m}{s}\right]\right)}{(500 \times 10^{-9}m)(10^{-7}s)}$$
$$= 3{,}97 \times 10^{-12}\left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]$$

Parte b):

Por lo que vimos en clase:

$$\langle P \rangle_{D.E} = \frac{\mu_0 \omega^4 P_0^2}{12\pi c}$$

Siendo $P_0 = Rq = Re^-$

Ahora: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$

Ahora realizamos el cociente para compararlos:

$$\frac{\langle P \rangle_{foton}}{\langle P \rangle_{D.E}} = \frac{\left(\frac{hc}{\lambda\tau}\right)}{\left(\frac{\mu_0 P_0^2}{12\pi c}\right)\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^4} = \frac{12\pi hc^2\lambda^4}{\lambda\tau\mu_0(Re)^2 16\pi^4 c^4} = \frac{3h\lambda^3}{4\tau\mu_0 R^2 e^2 \pi^3 c^2} = \frac{3h\lambda^3\mu_0\epsilon_0}{4\tau\mu_0 R^2 e^2 \pi^3}$$
$$= \frac{3h\lambda^3\epsilon_0}{4\tau R^2 e^2 \pi^3}$$

$$\frac{\langle P \rangle_{foton}}{\langle P \rangle_{D.E}} = \frac{3\left(6{,}626 \times 10^{-34}\left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]\right)(500 \times 10^{-9}m)^3\left(8{,}85 \times 10^{-12}\left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]\right)}{4(10^{-7}s)(10^{-10}m)^2(1{,}6 \times 10^{-19}C)^2(3{,}14)^3}$$
$$= 6{,}94 \times 10^{-11}$$

Si $\lambda = 50 \times 10^{-9}m$ entonces:

$$\frac{\langle P \rangle_{foton}}{\langle P \rangle_{D.E}} = 6{,}94 \times 10^{-14}$$

Ahora comparémosla con la dipolar magnética:

$$\langle P\rangle_{D.M} = \frac{\mu_0 \omega^4 m^2}{12\pi c^2}$$

Tomando las siguientes aproximaciones:

$$\vec{m} = \frac{e}{2M_e}\vec{L}, \vec{L} \cong \frac{h}{2\pi}$$

Entonces:

$$\langle P\rangle_{D.M} = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c^2}\left(\frac{e}{2M_e}\right)^2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2$$

Realizaremos el cociente nuevamente:

$$\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{D.E}} = \frac{\left(\frac{hc}{\lambda\tau}\right)}{\frac{\mu_0}{12\pi c^2}\left(\frac{e}{2M_e}\right)^2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^4} = \frac{12M_e^2\lambda^3\epsilon_0}{\tau c h^2 \pi e^2}$$

$$= \frac{12(9{,}11\times 10^{-31}kg)^2(500\times 10^{-9}m)^3\left(8{,}85\times 10^{-12}\left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]\right)}{(10^{-7}s)\left(3{,}0\times 10^8\left[\frac{m}{s}\right]\right)\left(6{,}626\times 10^{-34}\left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]\right)(3{,}14)(1{,}6\times 10^{-19}C)^2}$$

$$\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{D.M}} = 1{,}38\times 10^{-14}$$

Si $\lambda = 50\times 10^{-9}m$ entonces:

$$\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{D.M}} = 1{,}38\times 10^{-16}$$

Ahora comparémosla con la cuadrupolar:

$$\langle P\rangle_{C.E} = \frac{2e^2a^4\omega^6\mu_0}{15\pi c^3} = \frac{2e^2a^4\mu_0}{15\pi c^3}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^6$$

Con esta ecuación realizaremos el cociente nuevamente:

$$\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{C.E}} = \frac{\left(\frac{hc}{\lambda\tau}\right)}{\frac{2e^2a^4\mu_0}{15\pi c^3}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^6} = \frac{15\lambda^6 h\epsilon_0}{128e^2a^4\pi^5}$$

$$= \frac{15(500\times 10^{-9}m)^6\left(8{,}85\times 10^{-12}\left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]\right)\left(6{,}626\times 10^{-34}\left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]\right)}{128(1{,}6\times 10^{-19}C)^2(10^{-10})^4(3{,}14)^5}$$

$$\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{C.E}} = 1{,}37\times 10^{-8}$$

Si $\lambda = 50\times 10^{-9}m$ entonces:

$$\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{C.E}} = 1{,}37 \times 10^{-14}$$

Parte C:

Observar que en las cuentas cuando realizamos el cociente de la potencia media radiada del fotón, con las otras potencias clásicas, el único factor que está presente en las cuentas es el tiempo de vida medio del fotón que nos da la letra del ejercicio, por lo que, las cuentas son completamente iguales, solo debemos de hacer el producto de τ con el cociente de cada potencia realizada anteriormente:

$$\tau_{D.E} = \tau_{foton}\left(\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{D.E}}\right) = (10^{-7}s)(\,6{,}94 \times 10^{-14}) = 6{,}94 \times 10^{-21}s$$

$$\tau_{D.M} = \tau_{foton}\left(\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{D.M}}\right) = (10^{-7}s)(1{,}38 \times 10^{-14}) = 1{,}38 \times 10^{-21}s$$

$$\tau_{C.E} = \tau_{foton}\left(\frac{\langle P\rangle_{foton}}{\langle P\rangle_{C.E}}\right) = (10^{-7}s)(1{,}37 \times 10^{-8}) = 1{,}37 \times 10^{-15}s$$