Notas: Conjuntos y Funciones

Curso Matemática 0 - 2020

31 de marzo de 2020

1. Conjuntos

El concepto de conjunto representa la idea intuitiva de una colección de "objetos" que poseen una propiedad en común. A estos "objetos lo llamaremos *elementos* y notaremos $x \in X$ para indicar que x *pertenece a* X.
En principio observamos que un conjunto puede ser definido por *extensión*, esto es enumerando todos y cada uno de sus elementos, o por *comprensión* o *especificación*: como el subconjunto de un conjunto dado cuyos elementos son los que cumplen una determinada propiedad.

Ejemplos 1.1. Definimos el mismo conjunto A por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,
- comprensión: A es el conjunto de todas las vocales del abecedario.

Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o
- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Definición 1.2. Decimos que un conjunto A está *incluido* o *contenido* en otro conjunto B si para todo $x \in A$ se tiene $x \in B$, decimos también que A es *subconjunto* de B o que B *contiene* a A. En este caso notamos $A \subset B$. Observar que $A \subset B$ y $B \subset A$ implica $A = B$.

Como ejemplo de inclusiones podemos mirar los conjuntos de números: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

También escribiremos $A \not\subset B$ para indicar que A no está incluido en B, y $A \subsetneq B$ para indicar que A está contenido en B pero estos conjuntos no son iguales.

El *conjunto vacío* se notará por $\emptyset$. Este es un conjunto que no tiene elementos. Obervar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset X$.

1.1. Unión de conjuntos

Consideremos A y B dos conjuntos. La *unión* de A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a ambos, es decir que si otro conjunto C contiene a A y a B, entonces $A \cup B \subset C$.

Proposición 1.3. *La unión de conjuntos es asociativa. Es decir que si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demostración. Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.

De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y sólo si se cumple alguna de las condiciones (1), (2) o (3). □

La Proposición 1.3 da una definición para la unión de tres conjuntos. Más aún, es posible definir de esta forma la unión de cualquier cantidad finita de conjuntos.

En general podemos tomar una familia indexada de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ (esto quiere decir que para cada $i \in I$ se tiene un conjunto A_i), y definir su unión por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Si la familia de índices es finita, es decir, si por ejemplo $I = \{1, \ldots, k\}$, entonces escribimos

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_k.$$

Ejemplo 1.4. Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\},$$

donde $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ es el conjunto de números primos.

1.2. Intersección y resta de Conjuntos

Si A y B son dos conjuntos definimos:

- Su *intersección*: $A \cap B = \{x : x \in A \ \ y \ x \in B\}$
- Y su *resta*: $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Diremos que A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$.

Observar que la intersección (al igual que la unión) es conmutativa, es decir que $A \cap B = B \cap A$; sin embargo la resta no lo es.

Ejemplo 1.5. Consideramos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$A \cap B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $A \subset X$, entonces podemos definir el *complemento* de A en X como el conjunto $A^c = X \setminus A$.

Ejercicio 1.6. Probar que:

1. Si $A, B \subset X$, enconces $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subset B \subset X$, entonces $B^c \subset A^c$ (tanto A^c como B^c son los complementos en X).

En general, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada de conjuntos, entonces podemos definir su intersección como

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Por ejemplo si consideramos los conjuntos A_p como en el Ejemplo 1.4, tenemos

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

Ejercicio 1.7. Leyes de De Morgan

1. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto C. Expresar $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$ en términos de A^c y B^c.

2. Generalizar lo anterior a una cantidad cualquiera de conjuntos.

1.3. El conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales puede construirse a partir del conjunto vacío de la siguiente forma:

$$0 := \emptyset; \ 1 := \{\emptyset\}; \ 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \ 3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \ \cdots$$

En general se define $n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. De esta forma el orden en $\mathbb{N}$ queda determinado por la pertenencia o la inclusión, es decir que se tiene:

$$n < m \Leftrightarrow n \in m \Leftrightarrow n \subset m.$$

1.4. Producto cartesiano

Consideremos dos conjuntos A y B. El *producto cartesiano* de estos dos conjuntos es

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, \ b \in B\},$$

donde (a, b) es el par ordenado de los elementos a y b. Observar que como se trata de pares ordenados el producto cartesiano no es conmutativo.

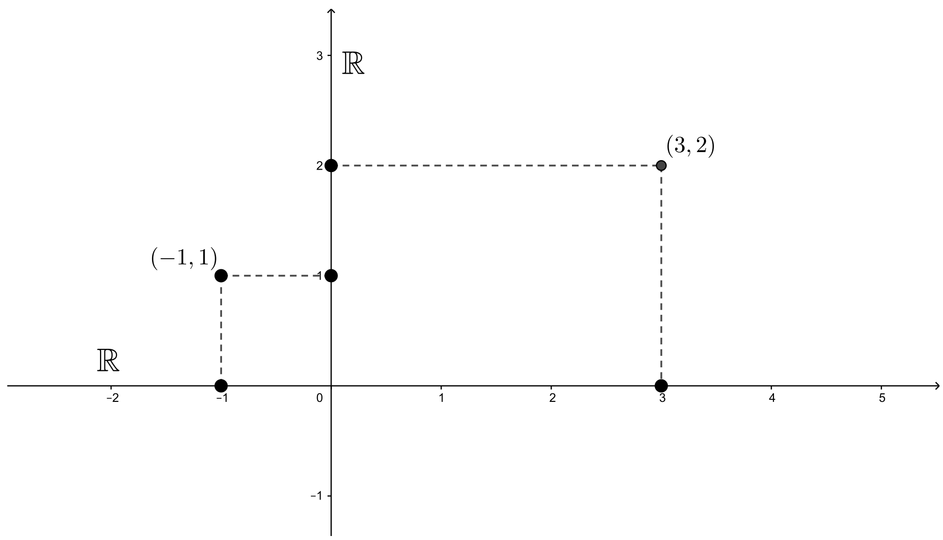
Ejemplos 1.8.

1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.

2. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\}.$$

3. El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con si misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales.



Definimos la *unión disjunta* de dos conjuntos A y B por

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

De esta forma A se identifica con el subconjunto $A \times \{0\}$ y B con el subconjunto $B \times \{1\}$.

Ejemplos 1.9. 1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, entonces

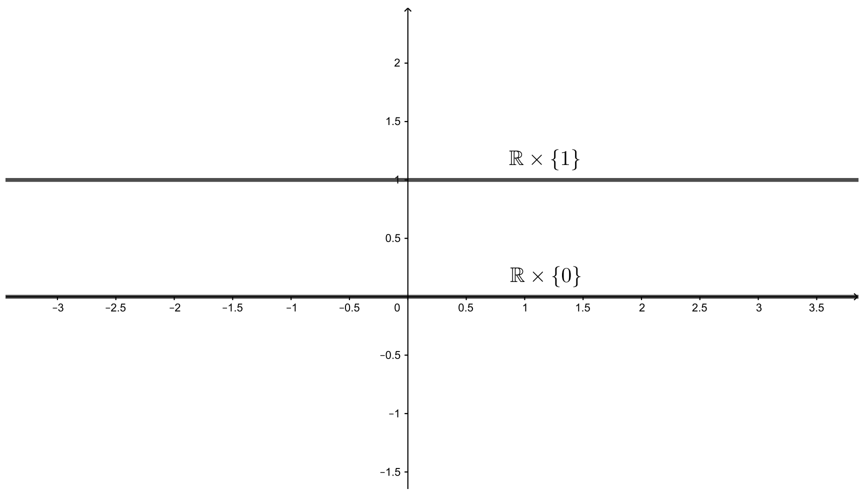
$$A \sqcup B = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}.$$

2. Definimos el conjunto de los números enteros por

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \mathbb{N},$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Identificamos aquí el conjunto de los naturales con los elementos de la forma (n,1), y los números negativos con los pares de la forma $(n, 0)$.

3. La unión disjunta de la recta real con si misma puede verse como la unión de dos rectas paralelas en el plano:



2. Funciones

Fijemos dos conjuntos A y B. Se llama *relación* de A a B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una *función* de A a B es una relación $f \subset A \times B$ con la siguiente condición: para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso llamamos *dominio* de f al conjunto A y *codominio* al conjunto B.

Escribimos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A a B.

Ejemplos 2.1.

1. Si $A = \emptyset$, entonces la única función posible $f : A \to B$ es la función vacía, es decir, $f = \emptyset$.

2. Sea X cualquier conjunto. Definimos la función *identidad en* X por
$$id_X : X \to X,\ id_X(x) = x\ \forall x \in X.$$

3. Si $A \subset B$ definimos la función *inclusión* por
$$i : A \to B,\ i(a) = a\ \forall a \in A.$$

4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es
$$f : A \to B, f(a) = b_0\ \forall a \in A.$$

5. Una *sucesión* en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Usualmente escribiremos $f(n) = x_n$. Por ejemplo podemos considerar la suceción de naturales $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = x_n = n^2$.

2.1. Conjunto de imágenes y preimágenes

Tomemos $f : X \to Y$ una función y $A \subset X$, $B \subset Y$. Definimos:

- El conjunto *imagen de A por f* como $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset Y$.
- El conjunto *preimagen de B por f* como $f^{-1}(B) = \{a \in X : f(a) \in B\}$.

También diremos *imagen de f* para referirnos al conjunto $f(X)$.

Ejercicio 2.2. Probar

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

2.2. Inyectividad y sobreyectividad

Decimos que una función $f : X \to Y$ es *inyectiva* si $f(x) = f(x')$ se da sólo si $x = x'$.

Ejemplos 2.3. 1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.

2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.
3. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, es inyectiva.
4. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, no es inyectiva.

Decimos que $f : X \to Y$ es *sobreyectiva* si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Ejemplos 2.4. 1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que $A = B$, en ese caso la función es la identidad.

2. Una función constante no es sobreyectiva salvo que su codominio sea un conjunto unitario.

3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, es sobreyectiva.

Ejercicio 2.5. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$. Además se da la igualdad $\forall A \subset X$ si y sólo si f es inyectiva.

2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Además se da la igualdad $\forall B \subset Y$ si y sólo si f es sobreyectiva.

Una función es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

2.3. Composición y función inversa

Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, su *composición* es la función $g \circ f : X \to Z$, definida por

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

En el caso $X = Z$ decimos que g es *inversa* de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to X$. Si f tiene una inversa diremos que es *invertible*.

Proposición 2.6. *Tomemos una función $f : X \to Y$.*

1. f es invertible si y sólo si es biyectiva.

2. Si f tiene inversa, entonces esta es única.

Demostración. 1. ($\Leftarrow$) Supongamos que g es una inversa de f. Veamos primero que f es inyectiva, para esto supongamos que $f(x) = f(x')$, luego

$$x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'.$$

Luego f es inyectiva.

Observar que si $y \in Y$, entonces $f(g(y)) = y$, es decir que y está en la imagen de f. Luego f es sobreyectiva.

($\Rightarrow$) Ahora suponemos que f es biyectiva y definamos su inversa g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$, ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f.

2. Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que para todo $y \in Y$, $g(y) = h(y)$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal $f(x) = y$, luego

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y).$$

$\square$

Si f es biyectiva (y por tanto tiene inversa), notaremos por f^{-1} a su inversa.

Ejemplo 2.7. Si A y B son dos conjuntos, la función $f : A \times B \to B \times A$, definida por $f(a, b) = (b, a)$, es una función biyectiva. Observar que f es su propia inversa.

Si $A = B = \mathbb{R}$ (es decir que $A \times B$ es el plano), entonces la función f es una simetría axial, ¿cuál es el eje de dicha simetría?