Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática 0
Año 2020

Lista de ejercicios: Conjuntos y Funciones

1. Negar la siguiente sentencia (no vale poner un *No* delante):

   Todos los caminos conducen a Roma.

   Proponer otros ejemplos y escribir su negación.

2. Dar el recíproco y contrarrecíproco de las siguientes afirmaciones:
   - Si vas a Facultad en el 370 entonces llegás más rápido que en el 21.
   - Si el piso está mojado es porque llovió.

3. *a*) Determinar los siguientes conjuntos por extensión.
   - A es el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.
   - B es el conjunto formado por las raíces cuadradas de los primeros 50 números naturales y que además sean naturales.

   b) Determinar los siguientes conjuntos por comprensión:
   - $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.
   - $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

   a) $\{1, 2, 3\}$ b) $\{1, 2, 2, 3\}$ c) $\{3, 2, 1\}$ d) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ e) $\{\{1, 2, 3\}\}$
   f) $\{1, \{2, 3\}\}$ g) $\{1, 2, 2, 3\}$ h) $\{3, 2\} \cup \{1, 2\}$ i) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \cap \{1, 2, 3\}$

5. Considerando los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$, indique cuáles son iguales entre sí.

$$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}; \quad B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}; \quad C = \{2m - 3 \mid m \in \mathbb{Z}\};$$
$$D = \{3r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\}; \quad E = \{3m + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}; \quad F = \{3m - 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

6. Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas.

   a) $1 \in A$ b) $\{1\} \in A$ c) $\{1\} \subseteq A$ d) $\{\{1\}\} \subseteq A$ e) $\{2\} \in A$
   f) $\{2\} \subseteq A$ g) $\{\{2\}\} \subseteq A$ h) $\{\{2\}\} \subsetneq A$

7. Probar que:

   a) Si $A, B \subset X$, entonces $A \setminus B = A \cap B^c$.

   b) Si $A \subset B \subset X$, entonces $B^c \subset A^c$ (tanto A^c como B^c son los complementos en X).

8. La *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B se define por $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Probar que se tiene la igualdad $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

9. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 7\}$, $B = \{2n : n \in A\}$, $C = \{3n : n \in (A \cap B)\}$ $D = \{1, 2, 3\}$

   Calcular:

   a) $A \cup B$ b) $A \cup D$ c) $A \cap C$ d) $A \setminus B$ e) $A \setminus D$ f) $D \setminus A$ g) $C \setminus A$
   h) $A \triangle D$ i) $A \triangle (B \cup D)$ j) $(A \cup B) \triangle (A \cap B)$

10. ¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos A y B para que se cumpla $A \cup B = A \triangle B$? Enunciar la respuesta anterior en forma de teorema y probarlo. ¿Se cumple el recíproco?

11. Leyes de De Morgan

    a) Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto C. Expresar $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$ en términos de A^c y B^c.

    b) Generalizar lo anterior a una cantidad cualquiera de conjuntos.

12. Sean A, B y C conjuntos. Expresar $A \cap (B \cup C)$ en términos de $A \cap B$ y $A \cap C$. ¿Se puede decir algo similar sobre $A \cup (B \cap C)$ y las uniones $A \cup B$ y $A \cup C$? Generalizar lo anterior a una cantidad cualquiera de conjuntos.

13. Averiguar si cada una de las siguientes relaciones de A en B es una función. Si lo es, determinar su imagen.

    a) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = x^2 + 7\}$, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.

    b) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^2 = x\}$, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.

    c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 3x + 1\}$, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.

    d) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 = 1\}$, $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{Q}$.

14. La regla de asignación $f(x) = 1/(x^2 - 2)$, ¿define una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$? ¿y una función $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$?

15. Determinar si la función $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ es inyectiva, sobreyectiva y hallar su imagen en cada uno de los siguientes casos.

    a) $f(x) = x + 7$ b) $f(x) = 2x - 3$ c) $f(x) = -x + 5$ d) $f(x) = x^2$
    e) $f(x) = x^2 + x$ f) $f(x) = x^3$

16. Probar

    a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
    b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
    c) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
    d) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

17. Una función $f : A \to B$ es *invertible a izquierda* si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por otro lado decimos que f es *invertible a derecha* si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Probar que una función

    a) es invertible a izquierda si y sólo si es inyectiva;
    b) es invertible a derecha si y sólo si es sobreyectiva;

18. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

    a) $A \subset f^{-1}(f(A))$. Además se da la igualdad $\forall A \subset X$ si y sólo si f es inyectiva.
    b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Además se da la igualdad $\forall B \subset Y$ si y sólo si f es sobreyectiva.